MODUL PERKULIAHAN

Statistika dan Probabilitas

Modul Standar untuk digunakan dalam Perkuliahan di Universitas Mercu Buana

Fakultas	Program Studi	Tatap Muka	Kode MK	Disusun Oleh
Ilmu Komputer penerbit Modul	Teknik Informatika Studi	05	87006	Yulius Eka Agung Seputra,ST,MSi

Abstract

Matakuliah statistik Menjadi Dasar dari Pemikiran penelitian seorang yang akan Mempelajari statistik.Statistik di sangat Penting dalam Membangun sebuah Aplikasi Program Mata Kuliah ini merupakan prayarat bagi Mata kuliah Algoritma dan Stuktur Data

Kompetensi

Mahasiswa dapat Memahami operasi dasar himpunan, dan penyajian himpuan

KATA PENGANTAR

Para mahasiswa/i pada saat ini tidak asing lagi dengan teknologi, karena sudah merupakan bagian dari kehidupan mereka sehari-hari. Mulai mereka menginjakkan kaki di sekolah dasar, mereka sudah terbiasa melihat komputer seperti melihat peralatan elektronik biasa baik dirumah maupun di lingkungan mereka. Modul ini dibuat untuk dapat cocok dengan apa yang telah mereka ketahui tentang komputer, dan apa yang kami percayai harus diketahui oleh mereka mengenai komputer dan peralatan lainnya.

Isi dari modul ini sedemikian rupa kami susun sehingga kami harapkan tidak ada pengetahuan yang terpisah, semua menjadi kesatuan pengetahuan yang menyatu dan berkesinambungan. Pada modul ini juga dibahas mengenai komunikasi dengan dan tanpa kabel pada peralatan komputer. Komputasi enterprise atau perusahaan besar juga menjadi bagian pengetahuan dari modul ini untuk memperluas wawasan para mahasiswa/i untuk dapat siap menghadapi dunia kerja yang terbentang di masa depan mereka.

Untuk mendukung pengetahuan mereka, mata kuliah juga akan dilengkapi dengan modul-modul laboratorium, yang akan mengembangkan kemampuan mahasiswa/i dalam memakai aplikasi komputer khususnya suite software: *Microsoft Office XP 2005*, kemampuan dan keahlian ini dikenal juga dengan istilah *“soft-skill”*.

Kami harapkan modul ini dapat menjadi pegangan untuk memahami dan juga aplikasi dari teknologi komputer, atau lebih luasnya lebih dikenal dengan istilah baru yaitu: Telematika. Akhir kata kami tim penyusun dengan rendah hati mohon maaf apabila ada kekurangan di sana sini, dan dengan hati terbuka kami dengan senang hati akan menerima semua jenis masukan, terutama kritik-kritik yang membangun untuk menjadikan modul ini menjadi lebih baik di masa mendatang.

Penulis modul,
Yulius Eka Agung Seputra,ST,MSi

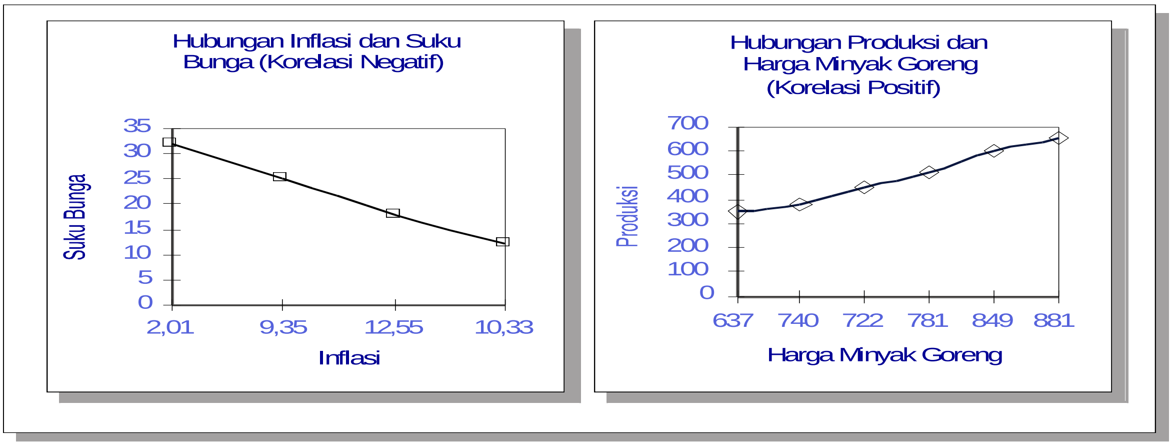
DAFTAR ISI

ANALISIS KORELASI DAN REGRESI LINEAR SEDERHANA

ANALISIS KORELASI:

Suatu teknik statistika yang digunakan untuk mengukur keeratan hubungan atau koelasi antara dua variabel.

Hubungan dua variabel ada yang positif dan negatif. Hubungan X dan Y dikatakan positif apabila kenaikan (penurunan) X pada umumnya diikuti oleh kenaikan (penurunan) Y. Sebaliknya dikatakan negatif kalau kenaikan (penurunan) X pada umumnya diikuti oleh penurunan (kenaikan) Y.



Jadi, kalau variabel X dan Y ada hubungan, maka bentuk diagram pencarnya adalah mulus/teratur. Apabila bentuk diagram pencar tidak teratur, artinya kenaikan/penurunan X pada umumnya tidak diikuti oleh naik turunnya Y, maka dikatakan X dan Y tidak berkorelasi.

Kuat dan tidaknya hubungan antara X dan Y apbila dapat dinyatakan dengan fungsi linear(paling tidak mendekati), diukur dengan suatu nialai yang disebut koefisien korelasi. Nilai koefisien korelasi ini paling sedikit –1 dan paling besar 1. Jadi jika r = koefiaien korelasi, maka r dapat dinyatakan sebagai berikut : $-1 \le r \le 1$

Jika r =1, hubungan X dan Y sempurna dan positif, r = -1, hubungan X dan Y sempurna dan negatif, r mendekati 1, hubungan sangat kuat dan positif, r mendekati –1, hubungan sangat kuat dan negatif.

Disini X dikatakan mempengaruhi Y, jika berubahnya nilai X akan menyebabkan perubahan nilai Y.

KOEFISIEN PENENTUAN :

Naik turunnya Y adalah sedemikian rupa sehingga nilai Y bervariasi, tidak semata-mata disebabkan oleh X, karena masih ada faktor lain yang menyebabkannya. Jadi untuk mengatahui berapa besar kontribusi dari X terhadap naik turunnya nilai Y maka harus dihitung dengan koefisien penentuan (koefisien determinasi). Kalau koefisien penentuan ditulis KP, maka untuk menghitung KP digunakan rumus berikut : KP = r^2.

CARA MENGHITUNG r :

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}$$ atau $$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2}}$$

Kedua rumus diatas disebut koefisien korelasi Pearson.

KOEFISIEN KORELASI DATA BERKELOMPOK :

Rumus untuk menghitung koefisien korelasi yang sudah dibahas diatas adalah untuk data yang tidak berkelompok (data yang belum disajikan dalam bentuk tabel frekuensi, dengan menggunakan kelas-kelas atau katagori-katagori). Untuk data yang berkelompok rumusnya adalah sebagai berikut :

$$r = \frac{n\left(\sum uvf\right) - \left(\sum uf_u\right)\left(vf_v\right)}{\sqrt{n\left(\sum u^2 f_u\right) - \left(\sum uf_u\right)^2}\sqrt{n\left(\sum v^2 f_v\right) - \left(\sum vf_v\right)^2}}$$

Rumus untuk menghitung koefisen korelasi bagi data berkelompok penting sekali sebab dalam praktek, misalnya di dalam suatu penelitian, hasil data yang diperoleh sudah disajikan dalam bentuk data berkelompok dengan interval kelas yang sama.

TEKNIK RAMALAN DAN ANALISIS REGRESI:

Tujuan utama materi ini adalah bagaimana menghitung suatu perkiraan atau persamaan regresi yang akan menjelaskan hubungan antara dua variabel.

Setelah ditetapkan bahwa terdapat hubungan logis di antara variabel, maka untuk mendukung analisis lebih jauh, barangkali tahap selanjutnya adalah menggunakan grafik. Grafik ini disebut diagram pencar, yang menunjukkan titik-titik tertentu. Setiap titik memperlihatkan suatu hasil yang kita nilai sebagai varibel tak bebas maupun bebas.

Diagram pencar ini memiliki 2 manfaat, yaitu : membantu menunjukkan apakah terdapat hubungan yang bermanfaat antara dua variabel, dan membantu menetapkan tipe persamaan yang menunjukkan hubungan antara kedua variabel tersebut.

PERSAMAAN REGRESI LINEAR :

Regresi merupakan suatu alat ukur yang juga digunakan untuk mengukur ada atau tidaknya korelasi antarvariabelnya. Istilah regresi itu sendiri berarti ramalan atau taksiran.Persamaan yang digunakan untuk mendapatkan garis regresi pada data diagram pencar disebut persamaan regresi.

Untuk menempatkan garis regresi pada data yang diperoleh maka digunakan metode kuadrat terkecil, sehingga bentuk persamaan regresi adalah sebagai berikut: $Y' = a + b X$

Kesamaan di antara garis regresi dan garis trend tidak dapat berakhir dengan persamaan garis lurus. Garis regresi (seperti garis trend dan nilai tengah aritmatika) memiliki dua sifat matematis berikut : $\Sigma(Y - Y') = 0$ dan $\Sigma(Y - Y')^2$ = nilai terkecil atau terendah. Dengan perkataan lain, garis regresi akan ditempatkan pada data dalam diagram sedemikian rupa sehingga penyimpangan (perbedaan) positif titik-titik terhadap titik-titik pencar di atas garis akan mengimbangi penyimpangan negatif titik-titik pencar yang terletak di bawah garis, sehingga hasil pinyimpangan keseluruhan titik-titik terhadap garis lurus adalah nol.

Untuk tujuan diatas, perhitungan analisis regresi dan analisis korelasi dapat dipermudah dengan menggunakan rumus dalam bentuk penyimpangan nilai tengah variabel X dan Y, yaitu penyimpangan dari $\overline{X}$ dan $\overline{Y}$.

Oleh karena itu, dapat digunakan simbol berikut ini :

$$x = \left(X - \overline{X}\right)$$
$$y = \left(Y - \overline{Y}\right)$$
$$dan\ xy = \left(X - \overline{X}\right)\left(Y - \overline{Y}\right)$$

Nilai dari a dan b pada persamaan regresi dapat dihitung dengan rumus berikut :

$$b = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$
$$atau \quad b = \frac{n\sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2}$$
$$a = \overline{Y} - b\overline{X}$$

PENGGUNAAN PERSAMAAN REGRESI DALAM PERAMALAN :

Tujuan utama penggunaan persamaan regresi adalah untuk memperkirakan nilai dari variabel tak bebas pada nilai variabel bebas tertentu. Tentu saja, tidak mungkin untuk mengatakan dengan tepat.

REGRESI LINEAR BERGANDA

DAN REGRESI (TREND) NONLINEAR

HUBUNGAN LIBIH DARI DUA VARIABEL REGRESI LINEAR BERGANDA :

Apabila terdapat lebih dari dua variabel, maka hubungan linear dapat dinyatakan dalam persamaan regresi linear berganda sebagai berikut :

$Y' = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + . . . + b_kX_k$

Disini ada satu variabel tidak bebas, yaitu Y' dan ada k varibel bebas, yaitu $X_1, . . . , X_k$.

Untuk menghitung $b_0, b_1, b_2, . . . , b_k$ kita gunakan metode kuadrat terkecil yang menghasilkan persamaan normal sebagai berikut :

$$b_0 n + b_1 \Sigma X_1 + b_2 \Sigma X_2 + . . . + b_k \Sigma X_k = \Sigma Y$$

$$b_0 \Sigma X_1 + b_1 \Sigma X_1 X_1 + b_2 \Sigma X_1X_2 + . . . + b_k \Sigma X_1X_k = \Sigma X_1Y$$

$$b_0 \Sigma X_2 + b_1 \Sigma X_1 X_2 + b_2 \Sigma X_2X_2 + . . . + b_k \Sigma X_2X_k = \Sigma X_2Y$$

. . . . .

. . . . .

. . . . .

$$b_0 \Sigma X_k + b_1 \Sigma X_1 X_k + b_2 \Sigma X_2X_k + . . . + b_k \Sigma X_kX_k = \Sigma X_kY$$

Kalau persamaan ini dipecahkan, kita akan memperoleh nilai $b_0, b_1, b_2, . . . , b_k$. Kemudian dapat dibentuk persamaan regresi linear berganda. Apabila persamaan regresi itu telah diperoleh, barulah kita dapat meramalkan nilai Y dengan syarat kalau nilai $X_1, X_2, ..., X_k$ sebagai variabel bebas sudah diketahui.

Misalkan: k =2, maka $Y' = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$, satu variabel tak bebas(Y), dan dua variabel bebas (X_1 dan X_2), maka b_0, b_1, dan b_2 dihitung dari persamaan normal berikut :

$$b_0 n + b_1 \Sigma X_1 + b_2 \Sigma X_2 = \Sigma Y$$

$b_0\ \Sigma X_1 + b_1\ \Sigma X_1\ X_1 + b_2\ \Sigma\ X_1X_2 = \Sigma X_1Y$

$b_0\ \Sigma X_2 + b_1\ \Sigma X_1\ X_2 + b_2\ \Sigma\ X_2X_2 = \Sigma X_2Y$

Persamaan diatas dapat dinyatakan dalam persamaan matriks berikut :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} n & \sum X_1 & \sum X_2 \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1X_2 \\ \sum X_2 & \sum X_1X_2 & \sum X_2^2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{b} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum X_1Y \\ \sum X_2Y \end{bmatrix}}_{H}$$

Variabel b dapat diselesaikan dengan cara sebagai

berikut :

$$b_0 = \frac{\det(A_0)}{\det(A)}, \quad b_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad b_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$$

Dimana :

$$A = \begin{bmatrix} n & \sum X_1 & \sum X_2 \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1X_2 \\ \sum X_2 & \sum X_1X_2 & \sum X_2^2 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = (n)\ (\Sigma X_1X_1)\ (\Sigma X_2X_2) + (\Sigma X_1)\ (\Sigma X_1X_2)\ (\Sigma X_2) + (\Sigma X_2)\ (\Sigma X_1)\ (\Sigma X_1X_2)$

$\quad - (\Sigma X_2)\ (\Sigma X_1X_1)\ (\Sigma X_2) - (\Sigma X_1X_2)\ (\Sigma X_1X_2)\ (n) - (\Sigma X_2X_2)\ (\Sigma X_1)\ (\Sigma X_1)$

$$A_0 = \begin{bmatrix} \sum Y & \sum X_1 & \sum X_2 \\ \sum X_1 Y & \sum X_1^2 & \sum X_1 X_2 \\ \sum X_2 Y & \sum X_1 X_2 & \sum X_2^2 \end{bmatrix}$$

det(A_0) = (ΣY) (ΣX_1X_1) (ΣX_2X_2) + (ΣX_1) (ΣX_1X_2) (ΣX_2Y) + (ΣX_2) (ΣX_1Y) (ΣX_1X_2)

– (ΣX_2Y) (ΣX_1X_1) (ΣX_2) – (ΣX_1X_2) (ΣX_1X_2) (ΣY) – (ΣX_2X_2) (ΣX_1Y) (ΣX_1)

$$A_1 = \begin{bmatrix} n & \sum Y & \sum X_2 \\ \sum X_1 & \sum X_1 Y & \sum X_1 X_2 \\ \sum X_2 & \sum X_2 Y & \sum X_2^2 \end{bmatrix}$$

det(A_1) = (n) (ΣX_1Y) (ΣX_2X_2) + (ΣY) (ΣX_1X_2) (ΣX_2) + (ΣX_2) (ΣX_1) (ΣX_2Y)

– (ΣX_2) (ΣX_1Y) (ΣX_2) – (ΣX_2Y) (ΣX_1X_2) (n) – (ΣX_2X_2) (ΣX_1) (ΣY)

$$A_2 = \begin{bmatrix} n & \sum X_1 & \sum Y \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1 Y \\ \sum X_2 & \sum X_1 X_2 & \sum X_2 Y \end{bmatrix}$$

$$\det(A_2) = (n)(\Sigma X_1X_1)(\Sigma X_2Y) + (\Sigma X_1)(\Sigma X_1Y)(\Sigma X_2) + (\Sigma Y)(\Sigma X_1)(\Sigma X_1X_2)$$

$$- (\Sigma X_2)(\Sigma X_1X_1)(\Sigma Y) - (\Sigma X_1X_2)(\Sigma X_1Y)(n) - (\Sigma X_2Y)(\Sigma X_1)(\Sigma X_1)$$

TREND PARABOLA :

Garis trend pada dasarnya adalah garis regresi di mana variabel bebas X merupakan variabel waktu. Baik garis regresi maupun trend dapat berupa garis lurus maupun tidak lurus. Persamaan garis trend parabola adalah sebagai berikut : $Y' = a + bX + cX^2$

Perhatikan bahwa bentuk persamaa seperti persamaan garis regresi linear berganda adalah $Y' = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$, di mana $b_0 = a$, $b_1 = b$, $b_2 = c$, $X_1 = X$, dan $X_2 = X^2$.

Dengan demikian cara menghitung koefisien a, b, dan c sama seperti menghitung b_0, b_1, dan b_2, yaitu menggunakan persamaan normal sebagai berikut :

$$a\,n + b\,\Sigma X + c\,\Sigma X^2 = \Sigma Y$$

$$a\,\Sigma X + b\,\Sigma X^2 + c\,\Sigma X^3 = \Sigma XY$$

$$a\,\Sigma X^2 + b\,\Sigma X^3 + c\,\Sigma X^4 = \Sigma X^2Y$$

TREND EKSPONENSIAL (LOGARITMA) :

Ada beberapa jenis trend yang tidak linear tetapi dapat dibuat linear dengan jalan melakukan transformasi (perubahan bentuk). Misalnya, trend eksponensial :

$Y' = ab^x$ dapat diubah menjadi trend semi log: $\log Y' = \log a + (\log b)X$;

$\log Y' = Y'_0$; $\log a = a_0$ dan $\log b = b_0$. Dengan demikian, $Y'_0 = a_0 + b_0X$, dimana koefisien a_0 dan b_0 dapat dicari berdasarkan persamaan normal.

PROBABILITAS

Definisi:

Probabilitas adalah peluang suatu kejadian.

Secara lengkap probabilitas didefinisikan sebagai berikut :

“Probabilitas” ialah suatu nilai yang digunakan untuk mengukur tingkat terjadinya suatu kejadian acak.

Manfaat:

Manfaat mengetahui probabilitas adalah membantu pengambilan keputusan yang tepat, karena kehidupan di dunia tidak ada kepastian, dan informasi yang tidak sempurna.

Contoh:

- Pembelian harga saham berdasarkan analisis harga saham
- Peluang produk yang diluncurkan perusahaan (sukses atau tidak), dan lain-lain.

Dalam mempelajari probabilitas, ada tiga kata kunci yang harus diketahui :

1. Percobaan
2. Hasil (outcome)
3. Kejadian atau peristiwa (event)

Percobaan:

Pengamatan terhadap beberapa aktivitas atau proses yang memungkinkan timbulnya paling sedikit dua peristiwa tanpa memperhatikan peristiwa mana yang akan terjadi.

Hasil (*outcome*):

Suatu hasil dari sebuah percobaan.

Peristiwa (*event*):

Kumpulan dari satu atau lebih hasil yang terjadi pada sebuah percobaan atau kegiatan.

Contoh :

Dari ***percobaan*** pelemparan sebuah koin. ***Hasil (outcome)*** dari pelemparan sebuah koin tersebut adalah “MUKA” atau “BELAKANG”. Kumpulan dari beberapa hasil tersebut dikenal sebagai ***peristiwa (event)*****.**

Probabilitas biasanya dinyatakan dengan bilangan desimal (seperti 0,50 ; 0,25 atau 0,70) atau bilangan pecahan (seperti $\frac{5}{10}, \frac{25}{100}, atau\ \frac{70}{100}$).

Nilai dari probabilitas berkisar antara 0 dan 1. Semakin dekat nilai probabilitas ke nilai 0, semakin kecil kemungkinan suatu kejadian akan terjadi. Sebaliknya semakin dekat nilai probabilitas ke nilai 1 semakin besar peluang suatu kejadian akan terjadi.

PENDEKATAN PERHITUNGAN PROBABILITAS

Ada dua pendekatan dalam menghitung probabilitas yaitu pendekatan yang bersifat *objektif dan subjektif.*

Probabilitas objektif dibagi menjadi dua, yaitu :

1. Pendekatan Klasik
2. Konsep Frekuensi Relatif

1. Pendekatan Klasik

Probabilitas diartikan sebagai hasil bagi dari banyaknya peristiwa yang dimaksud dengan seluruh peristiwa yang mungkin menurut pendekatan klasik, probabilitas dirumuskan :

$$P(A) = \frac{x}{n}$$

keterangan :

P(A) = probabilitas terjadinya kejadian A.

x = peristiwa yang dimaksud.

n = banyaknya peristiwa.

Contoh :

Dua buah dadu dilempar ke atas secara bersamaan. Tentukan probabilitas munculnya angka berjumlah 5.

Penyelesaian :

Hasil yang dimaksud (x) = 4, yaitu (1,4), (4,1), (2,3). (3,2)

Hasil yang mungkin (n) = 36, yaitu (1,1), (1,2), (1,3). ….., (6,5), (6,6).

$$P(A) = \frac{4}{36} = 0{,}11$$

2. Konsep Frekuensi Relatif

Menurut pendekatan frekuensi relatif, probabilitas diartikan sebagai proporsi waktu terjadinya suatu peristiwa dalam jangka panjang, jika kondisi stabil atau frekuensi relatif dari suatu peristiwa dalam sejumlah besar percobaan.

Nilai probabilitas ditentukan melalui percobaan, sehingga nilai probabilitas itu merupakan limit dari frekuensi relatif peristiwa tersebut. Menurut pendekatan frekuensi relatif, probabilitas dirumuskan :

$$P(x_i) = l\,\underset{n \to \infty}{\text{imit}} \frac{f_i}{n}$$

keterangan :

$P(X_i)$ = probabilitas peristiwa i.

f_i = frekuensi peristiwa i.

n = banyaknya peristiwa yang bersangkutan.

Contoh :

Dari hasil ujian statistik, 65 mahasiswa STMIK MDP, didapat nilai-nilai sebagai berikut.

x	5,0	6,5	7,4	8,3	8,8	9,5
f	11	14	13	15	7	5

x = nilai statistik.

Tentukan probabilitas salah seorang mahasiswa yang nilai statistiknya 8,3.

Penyelesaian :

Frekuensi mahasiswa dengan nilai 8,3 (f) = 15

Jumlah mahasiswa (n) = 65.

$$P(x = 8{,}3) = \frac{15}{65} = 0{,}23$$

Probabilitas Subjektif

Menurut pendekatan subjektif, probabilitas diartikan sebagai tingkat kepercayaan individu yang didasarkan pada peristiwa masa lalu yang berupa terkaan saja.

Contoh :

Seorang direktur akan memilih seorang supervisor dari empat orang calon yang telah lulus ujian saringan. Keempat calon tersebut sama pintar, sama lincah, dan semuanya dapat dipercaya. Probabilitas tertinggi(kemungkinan diterima) menjadi supervisor ditentukan secara subjektif oleh sang direktur.

Dari pengertian-pengertian tersebut, dapat disusun suatu pengertian umum mengenai probabilitas, yaitu sebagai berikut :

Probabilitas adalah suatu indeks atau nilai yang digunakan untuk menentukan tingkat terjadinya suatu kejadian yang bersifat random (acak).

Oleh karena probabilitas merupakan suatu indeks atau nilai maka probabilitas memiliki batas-batas yaitu mulai dari 0 sampai dengan 1 ($0 \leq P \leq 1$).

- Jika P = 0, disebut probabilitas kemustahilan, artinya kejadian atau peristiwa tersebut tidak akan terjadi.
- Jika P = 1, disebut probabilitas kepastian, artinya kejadian atau peristiwa tersebut pasti terjadi.
- Jika 0 < P < 1, disebut probabilitas kemungkinan, artinya kejadian atau peristiwa tersebut dapat atau tidak dapat terjadi.

HIMPUNAN :

Pengertian Himpunan.

Himpunan adalah kumpulan objek yang didefinisikan dengan jelas dan dapat dibeda-bedakan. Setiap objek yang secara kolektif membentuk himpunan tersebut disebut elemen atau unsur atau anggota dari himpunan tersebut.

Himpunan dilambangkan dengan pasangan kurung kurawal { } dan biasanya dinyatakan dengan huruf kapital (besar), seperti A, B, C, …. Anggota himpunan ditulis dengan lambang $\in$, bukan anggota himpunan dengan lambing $\notin$.

Penulisan Himpunan :

Himpunan dapat ditulis dalam dua cara, yaitu cara pendaftaran dan cara pencirian.

Cara Pendaftaran :

Dengan cara pendaftaran, unsur himpunan ditulis satu per satu atau didaftar.

Contoh :

1. A = {a, i, u, e, o}

2. B = {1, 2, 3, 4, 5}

Dalam statistik, cara penulisan seperti contoh 2 menghasilkan data diskrit.

Cara Pencirian :

Dengan cara pencirian, unsur-unsur himpunan ditulis dengan menyebutkan sifar-sifat atau cirri-ciri unsur himpunan tersebut.

Contoh :

1. A = {X : x huruf hidup}.

2. B = {X : $1 \leq x \leq 2$}.

Dalam statistik, cara penulisan seperti contoh 2 menghasilkan data kontinu atau variabel kontinu. Tanda (:) dibaca sedemikian rupa sehingga atau X di mana ……

Macam-macam Himpunan :

1. Himpunan Semesta :

Himpunan semesta adalah himpunan yang memuat seluruh objek yang dibicarakan atau himpunan yang menjadi objek pembicaraan. Himpunan semesta dilambangkan S atau U.

Contoh :

a. S = U = {a, b, c, ….}

b. S = U = {X : x bilangan asli}

2. Himpunan Kosong :

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memiliki anggota. Himpunan kosong dilambangkan ϕ atau { }.

3. Himpunan Bagian :

Himpunan bagian adalah himpunan yang menjadi bagian dari himpunan lain. Himpunan A merupakan himpunan bagian dari B jika setiap unsure A merupakan unsure B atau A termuat di dalam B atau B memuat A. Himpunan bagian dilambangkan $\subset$, $A \subset B$. Banyaknya himpunan bagian dari sebuh himpunan dengan n unsur adalah 2^n.

Contoh :

Jika diketahui : A = {1, 2, 3}, tentukan banyaknya himpunan bagian dari A dan tuliskan himpunan-himpunan bagian tersebut.

Penyelesaian :

- Banyaknya himpunan bagian A adalah $2^3 = 8$

- Himpunan-himpunan bagian itu adalah : { }, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}.

Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari semua himpunan. Dalam statistik, himpunan bagian merupakan sampel.

4. Himpunan Komplemen :

Himpunan komplemen adalah himpunan semua unsur yang tidak termasuk dalam himpunan yang diberikan. Jika himpunannya adalah A maka himpunan komplemennya dilambang $\bar{A}$.

Contoh :

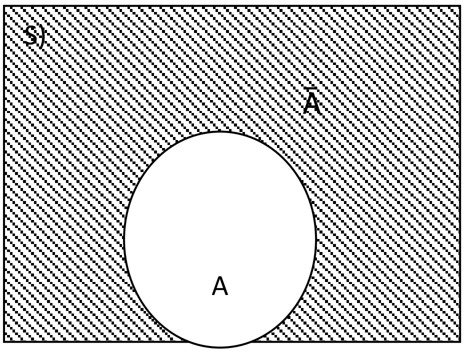
Jika diketahui : S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

A = {2, 4, 6}

Tentukan Ā !

Penyelesaian :

Ā = {1, 3, 5, 7}.



__Operasi Himpunan :__

1. Operasi Gabungan (union) :

Gabungan dari himpunan A dan himpunan B adalah semua unsur yang termasuk di dalam A atau di dalam B atau di dalam A dan B sekaligus. Gabungan dari himpunan A dan himpunan B dilambangkan $A \cup B$ ataau A + B. Dituliskan : $A \cup B = \{ X : x \in A, x \in B$, atau $x \in AB\}$.

Contoh :

Jika diketahui : S = {X : 0 ≤ x ≤ 10}

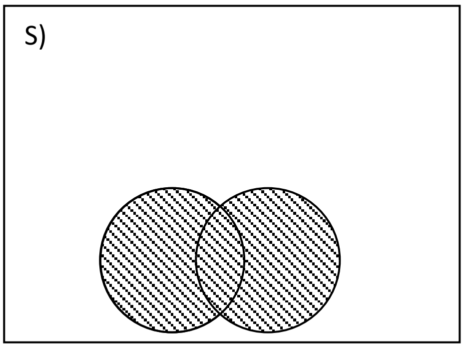
P = {2, 3, 5, 7}

G = {2, 4, 6, 8, 10}

Tentukan : P ∪ G !

Penyelesaian :

P ∪ G = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10}



P ∪ G daerah yang diarsir

P G

2. Operasi Irisan (interseksi) :

Irisan dari himpunan A dan B adalah himpunan semua unsur yang termasuk di dalam A dan di dalam B. Irisan daari himpunan A dan himpunan B dilambangkan A ∩ B atau AB dan dituliskan : A ∩ B = {X : x ∈ A dan x ∈ B}.

Contoh :

Jika diketahui : S = { x : 2 ≤ x ≤ 8}

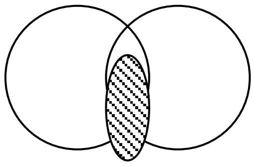
P = {2, 3, 5, 7}

A = {2, 3, 4, 6}

Tentukan P ∩ A !

Penyelesaian :

P ∩ A = {2, 3}



P ∩ A daerah yang diarsir

P A

3. Operasi Selisih :

Selisih himpunan A dan B adalah himpunan semua unsur A yang tidak termasuk di dalam B. Selisih himpunan A dan himpunan B dilambangkan A – B.

Dituliskan : {X : x ∈ A dan x ∉ B }

Contoh :

Jika diketahui : S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

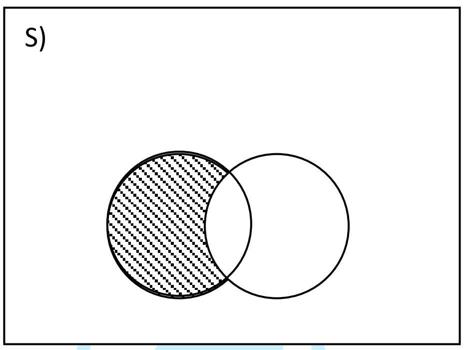
P = {2, 3, 5, 7}

G = {2, 4, 6, 8}

Tentukan P – G !

Penyelesaian :

P – G = {3, 5, 7}



P – G daerah yang diarsir

P G

Beberapa Aturan Dalam Himpunan :

1. Hukum komutatif

   $A \cup B = B \cup A$

   $A \cap B = B \cap A$

2. Hukum Asosiatif

   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. Hukum Distributif

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4. Hukum Identitas

   $A \cap S = A$

   $A \cap \phi = \phi$

5. Hukum Komplemen

   $A \cap \bar{A} = \phi$

   $A \cup \bar{A} = S$

BEBERAPA ATURAN DASAR PROBABILITAS

Aturan Penjumlahan :

Untuk menerapkan aturan penjumlahan ini, harus dilihat jenis kejadiannya apakah bersifat saling meniadakan atau tidak saling meniadakan.

1. Kejadian Saling Meniadakan :

Dua peristiwa atau lebih disebut saling meniadakan jika kedua atau lebih peristiwa itu tidak dapat terjadi pada saat yang bersamaan. Jika peristiwa A dan B saling meniadakan, probabilitas terjadinya peristiwa tersebut adalah

P(A atau B) = P(A) + P(B) atau

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Contoh :

Sebuah dadu dilemparkan ke atas, peritiwanya adalah

A = peristiwa mata dadu 4 muncul.

B = peristiwa mata dadu lebih kecil dari 3 muncul.

Tentukan probabilitas dari kejadian berikut !

- Mata dadu 4 atau lebih kecil dari 3 muncul!

Penyelesaian :

P(A) = 1/6

P(B) = 2/6

P(A atau B) = P(A) + P(B)

= 1/6 + 2/6

= 0,5

2. Kejadian Tidak Saling Meniadakan :

Dua peristiwa atau lebih disebut peristiwa tidak saling meniadakan apabila kedua peristiwa atau lebih tersebut dapat terjadi pada saat yang bersamaan. Jika dua peristiwa A dan B tidak saling meniadakan, probabilitas terjadinya peristiwa tersebut adalah

P(A atau B) = P(A) + P(B) – P(A dan B)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Jika 3 peristiwa A, B, dan C tidak saling meniadakan, probabilitas terjadinya peristiwa tersebut adalah

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Contoh :

Dua buah dadu dilemparkan bersamaan, apabila :

A = peristiwa mata (4, 4) muncul.

B = peristiwa mata lebih kecil dari (3, 3) muncul.

Tentukan probabilitas P(A atau B) !

Penyelesaian :

P(A) = 1/36

P(B) = 14/36

$P(A \cap B) = 0$

$P(A \text{ atau } B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 1/36 + 14/36 - 0$

$= 0{,}42$

<u>Aturan Perkalian :</u>

Dalam konsep probabilitas, aturan perkalian diterapkan secara berbeda menurut jenis kejadiannya. Ada dua jenis kejadian dalam hal ini, yaitu kejadian tak bebas dan kejadian bebas.

1. Kejadian Tak Bebas :

Dua peristiwa atau lebih disebut kejadian tidak bebas apabila peristiwa yang satu dipengaruhi atau tergantung pada peritiwa lainnya.

Probabilitas peristiwa tidak saling bebas dapat pula dibedakan atas tiga macam, yaitu yaitu probabilitas bersyarat, gabungan, dan marjinal.

a. Probabilitas Bersyarat :

Probabilitas bersyarat peristiwa tidak saling bebas adalah probabilitas terjadinya suatu peristiwa dengan syarat peristiwa lain harus terjadi dan peristiwa-peristiwa tersebut saling mempengaruhi. Jika peristiwa B bersyarat terhadap A, probabilitas terjadinya periwtiwa tersebut adalah

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

P(B/A) dibaca probabilitas terjadinya B dengan syarat peristiwa A terjadi.

Contoh :

Sebuah kotak berisikan 11 bola dengan rincian :

5 buah bola putih bertanda +

1 buah bola putih bertanda –

3 buah bola kuning bertanda +

2 buah bola kuning bertanda –

Seseorang mengambil sebuah bola kuning dari kotak

- Berapa probabilitas bola itu bertanda +?

Penyelesaian :

Misalkan : A = bola kuning

B^+ = bola bertanda positif

B^- = bola bertanda negatif.

P(A) = 5/11

$P(B^+ \cap A) = 3/11$

$$P(B^+/A) = \frac{P(B^+ \cap A)}{P(A)}$$

$$P(B^+/A) = \frac{\frac{3}{11}}{\frac{5}{11}} = \frac{3}{5}$$

b. Probabilitas Gabungan :

Probabilitas gabungan peritiwa tidak saling bebas adalah probabilitas terjadinya dua atau lebih peristiwa secara berurutan(bersamaan) dan peristiwa-peristiwa itu saling mempengaruhi.

Jika dua peristiwa A dan B gubungan, probabilitas terjadinya peristiwa tersebut adalah

$P(A \text{ dan } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$

Jika tiga buah peristiwa A, B, dan C gabungan, probabilitas terjadinya peristiwa tersebut adalah

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B/A) \times P(C/A \cap B)$

Contoh :

Dari satu set kartu bridge berturut-turut diambil kartu itu sebanyak 2 kali secara acak. Hitunglah probabilitasnya kartu king (A) pada pengambilan pertama dan as(B) pada pengambilan kedua, jika kartu pada pengambilan pertama tidak dikembalikan !

Penyelesaian :

(A) = pengambilan pertama keluar kartu king.

$P(A) = 4/52$

(B/A) = pengambilan kedua keluar kartu as

$P(B/A) = 4/51$

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$

$= 4/52 \times 4/51$

$= 0{,}006$

c. Probabilitas Marjinal :

Probabilitas marjinal peristiwa tidak saling bebas adalah probabilitas terjadinya suatu peristiwa yang tidak memiliki hubungan dengan terjadinya peristiwa lain dan peristiwa tersebut saling mempengaruhi. Jika dua peristiwa A adalah marjinal, probabilitas terjadinya peristiwa A tersebut adalah

$P(A) = \Sigma P(B \cap A)$

$= \Sigma P(A_i) \times P(B/A_i)$, i = 1, 2, 3, …..

Contoh :

Sebuah kotak berisikan 11 bola dengan rincian :

5 buah bola putih bertanda +

1 buah bola putih bertanda –

3 buah bola kuning bertanda +

2 buah bola kuning bertanda –

Tentukan probabilitas memperoleh sebuah bola putih !

Penyelesaiana :

Misalkan : A = bola putih

B^+ = bola bertanda positif

B^- = bola bertanda negatif

$P(B^+ \cap A) = 5/11$

$P(B^- \cap A) = 1/11$

$P(A) = P(B^+ \cap A) + P(B^- \cap A)$

$= 5/11 + 1/11$

$= 6/11$

2. Kejadian Bebas :

Dua kejadian atau lebih dikatakan merupakan kejadian bebas apabila terjadinya kejadian tersebut tidak saling mempengaruhi. Dua kejadian A dan B dikatakan bebas, kalau kejadian A tidak mempengaruhi B atau sebaliknya. Jika A dan B merupakan kejadian bebas, maka P(A/B) = P(A) dan P(B/A) = P(B)

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B) = P(B)\, P(A)$$

Contoh :

Satu mata uang logam Rp. 50 dilemparkan ke atas sebanyak dua kali. Jika A_1 adalah lemparan pertama yang mendapat gambar burung(B), dan A_2 adalah lemparan kedua yang mendapatkan gambar burung(B), berapakah $P(A_1 \cap A_2)$!

Penyelesaian :

Karena pada pelemparan pertama hasilnya tidak mempengaruhi pelemparan kedua dan $P(A_1) = P(B) = 0{,}5$ dan $P(A_2) = P(B) = 0{,}5$, maka $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\,P(A_2) = P(B)\,P(B) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$.

<u>Rumus Bayes :</u>

Jika dalam suatu ruang sampel (S) terdapat beberapa peristiwa saling lepas, yaitu A_1, A_2, A_3, …., A_n yang memiliki probabilitas tidak sama dengan nol dan bila ada peritiwa lain (misalkan X) yang mungkin dapat terjadi pada peristiwa-peristiwa A_1, A_2, A_3, …., A_n maka probabilitas terjadinya peristiwa-peristiwa A_1, A_2, A_3, …., A_n dengan diketahui peristiwa X tersebut adalah

$$P(A_i / X) = \frac{P(A_i)P(X / A_i)}{P(A_1)\,P(X / A_1) + P(A_2)(X / A_2) + ... + P(A_n)P(X / A_n)}$$

$$i = 1,\ 2,\ 3,\ 4, ...$$

Contoh :

Tiga kotak masing-masing memiliki dua laci. Didalam laci-laci tersebut terdapat sebuah bola. Didalam kotak I terdapat bola emas, dalam kotak II terdapat bola perak, dan dalam kotak III terdapat bola emas dan perak. Jika diambil sebuah kotak dan isinya bola emas, berapa probabilitas bahwa laci lain berisi bola perak?

Penyelesaian :

Misalkan : A_1 peristiwa terambil kotak I

A_2 peristiwa terambil kotak II

A_3 peristiwa terambil kotak III

X peristiwa laci yang dibuka berisi bola emas

Kotak yang memenuhi pertanyaan adalah kotak III ($P(A_3/X)$).

$P(A_1) = 1/3$ $\quad$ $P(X/A_1) = 1$

$P(A_2) = 1/3$ $\quad$ $P(X/A_2) = 0$

$P(A_3) = 1/3$ $\quad$ $P(X/A_3) = ½$

$$P(A_3 / X) = \frac{P(A_3).P(X / A_3)}{P(A_1).P(X / A_1) + P(A_2).P(X / A_2) + P(A_3).P(X / A_3)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)(1) + \left(\frac{1}{3}\right)(0) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}$$

PERMUTASI DAN KOMBINASI

Pembicaraan mengenai permutasi dan kombinasi selalu berkaitan dengan prinsip dasar membilang dan faktorial.

1. Prinsip Dasar Membilang :

Jika kejadian pertama dapat terjadi dalam n_1 cara, kejadian kedua dalam n_2 cara, demikian seterusnnya, sampai kejadian k dalam n_k cara, maka keseluruhan kejadian dapat terjadi dalam :

n_1 x n_2 x …x n_k cara

Contoh :

Seorang pengusaha ingin bepergian dari Jakarta ke Ujungpandang melalui Surabaya. Jika Jakarta – Surabaya dapat dilalui dengan tiga cara dan Surabaya – Ujungpandang dapat dilalui dengan dua cara, ada berapa cara pengusaha tersebut dapat tiba di Ujungpandang melalui Surabaya?

Penyelesaian :
misalkan : dari Jakarta ke Surabaya (n_1) = 3 cara.

Dari Surabaya ke Ujungpandang (n_2) = 2 cara.

Cara pengusaha tersebut dapat tiba di Ujungpandang melalui Surabaya adalah :

n_1 x n_2 = 3 x 2 = 6 cara.

2. Faktorial :

Faktorial adalah perkalian semua bilangan bulat positif (bilangan asli) terurut mulai dari bilangan 1 sampai dengan bilangan bersangkutan atau sebaliknya.

Faktorial dilambangkan: “!”.

Jika : n = 1,2, …., maka :

n! = n(n – 1)(n – 2) ….x 2 x 1

= n(n –1)!

Contoh :

Tentukan nilai factorial dari bilangan berikut

a. 5!
b. 3! X 2!
c. 6!/4!

Penyelesaian :

a. 5! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120
b. 3! X 2! = 3 x 2 x 1 x 2 x 1 = 12
c. $\frac{6!}{4!} = \frac{6x5x4x3x2x1}{4x3x2x1} = 30$

Permutasi :

1. Pengertian Permutasi :

Permutasi adalah suatu penyusunan atau pengaturan beberapa objek ke dalam suatu urutan tertentu.

Contoh :

Ada 3 objek, yaitu ABC. Pengaturan objek-objek tersebut ialah ABC, ACB, BCA, BAC, CAB, CBA yang disebut permutasi. Jadi, permutasi 3 objek menghasilkan enam pengaturan dengan cara yang berbeda.

2. Rumus-rumus Permutasi :

a. Permutasi dari m objek seluruhnya tanpa pengembalian : mPm = m!

Contoh :

Pada suatu tempat terdapat 4 buku matematika yang berbeda. Buku itu akan disusun pada sebuah rak buku. Berapa cara susunan yang mungkin dari buku-buku matematika dapat disusun.

Penyelesaian :

Buku-buku matematika dapat disusun dalam :

4P4 = 4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24 cara.

b. Permutasi sebanyak x dari m objek tanpa pengembalian :

$$mPx = \frac{m!}{(m-x)!} \quad (m \geq x)$$

Contoh :

Dari empat calon pimpinan sebuah perusahaan, misalkan A, B, C, D hendak dipilih seorang ketua, seorang sekretaris, dan seorang bendahara.

Berapa cara keempat calon tersebut dipilih?

Penyelesaian:

m = 4 dan x = 3

4P3 = $\frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4x3x2x1}{1} = 24$

c. Permutasi dari m objek dengan pengembalian :

mPx = m^x

x ≤ m dan bilangan bulat positif

Contoh :

Tentukan permutasi dari ABC sebanyak 2 unsur dengan pengembalian unsure yang terpilih!

Penyelesaian :

M = 3 dan x = 2

3P2 = 3^2 = 9

yaitu : AA, AB, AC, BB, BA, BC, CC, CA, CB

d. Permutasi daaari m objek yang sama :

$$mPm_1, m_2, m_3, \ldots = \frac{m!}{m_1!\ .\ m_2!\ .\ m_3!\ \ldots}$$

Dengan $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots = m$

Contoh :

Tentukan permutasi dari kata “TAMAT”

Penyelesaian :

M = 5, m_1 = 2, m_2 = 2, m_3 = 1

$$5P2, 2, 1 = \frac{5!}{2!\ .\ 2!\ .\ 1!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1} = 30$$

Kombinasi :

1. Pengertian Kombinasi :

Kombinasi adalah suatu penyusunan beberapa objek tanpa memperhatikan urutan objek tersebut.

Contoh :

Ada 4 objek, yaitu : A, B, C, D. Kombinasi 3 dari objek itu adalah ABC, ABD, ACD, BCD. Setiap kelompok hanya dibedakan berdasarkan objek yang diikutsertakan, bukan urutannya. Oleh karena itu :

ABC = ACB = BAC = BCA = CAB = CBA

ABD = ADB = BAD = BDA = DAB = DBA

ACD = CAD = ADC = CDA = DAC = DCA

BCD = BDC = CBD = CDB = DBC = DCB

2. Rumus-rumus Kombinasi :

a. Kombinasi x dari m objek yang berbeda :

$$mCx = \frac{m!}{(m - x)!.x!} \quad ; m \geq x$$

Contoh :

Dari 5 pemain bulu tangkis, yaitu A, B, C, D, dan E hendak dipilih dua orang untuk pemain ganda. Berapa banyak pemain ganda yang mungkin terbentuk?

Penyelesaian :

M = 5 dan x = 2

$$5C2 = \frac{5!}{(5 - 2)!\,.\,2!} = 10$$

VARIABEL ACAK DAN NILAI HARAPAN

VARIABEL ACAK :

Untuk menggambarkan hasil-hasil percobaan sebagai nilai-nilai numerik secara sederhana, kita menggunakan apa yang disebut sebagai variabel acak. Jadi variabel acak dapat didefinisikan sebagai deskripsi numerik dari hasil percobaan.

Variabel acak biasanya menghubungkan nilai-nilai numerik dengan setiap kemungkinan hasil percobaan. Karena nilai-nilai numerik tersebut dapat bersifat diskrit(hasil perhitungan) dan bersifat kontinu(hasil pengukuran) maka variabel acak dapat dikelompokkan menjadi variabel acak diskrit dan variabel acak kontinu.

Variabel Acak Diskrit.

Varibel acak diskrit adalah variabel acak yang tidak mengambil seluruh nilai yang ada dalam sebuah interval atau variabel yang hanya memiliki nilai tertentu. Nilainya merupakan bilangan bulat dan asli, tidak berbentuk pecahan. Variabel acak diskrit jika digambarkan pada sebuah garis interval, akan berupa sederetan titik-titik yang terpisah.

Contoh :

1. Banyaknya pemunculan sisi muka atau angka dalam pelemparan sebuah koin (uang logam).
2. Jumlah anak dalam sebuah keluarga.

Variabel Acak Kontinu.

Varibel acak kontinu adalah variabel acak yang mengambil seluruh nilai yang ada dalam sebuah interval atau variabel yang dapat memiliki nilai-nilai pada suatu interval tertentu. Nilainya dapat merupakan bilangan bulat maupun pecahan. Varibel acak kontinu jika digambarkan pada sebuah garis interval, akan berupa sederetan titik yang bersambung membantuk suatu garis lurus.

Contoh :

1. Usia penduduk suatu daerah.
2. Panjang beberpa helai kain.

DISTRIBUSI PROBABILITAS VARIABEL ACAK DISKRIT :

Distribusi probabilitas variabel acak menggambarkan bagaimana suatu probabilitas didistribusikan terhadap nilai-nilai dari variabel acak tersebut. Untuk variabel diskrit X, distribusi probabilitas didefinisikan dengan fungsi probabilitas dan dinotasikan sebagai p(x).

Fungsi probabilitas p(x) menyatakan probabilitas untuk setiap nilai variabel acak X.

Contoh :

Jumlah mobil terjual dalam sehari menurut jumlah hari selama 300 hari

Jumlah mobil terjual dalam sehari	Jumlah hari
0	54
1	117
2	72
3	42
4	12
5	3
Total	300

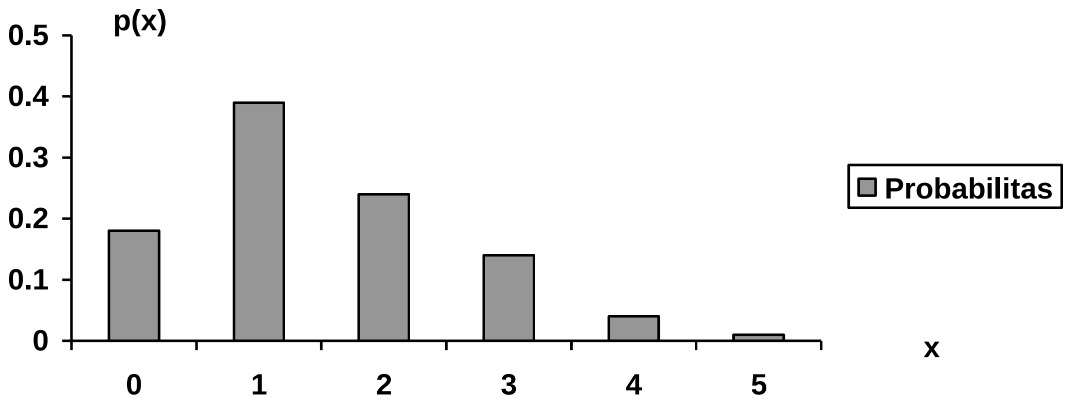
Distribusi Probabilitas Jumlah Mobil Terjual dalam Sehari

X	p(x)
0	0,18
1	0,39
2	0,24
3	0,14
4	0,04
5	0,01
Total	1,00

Dalam membuat suatu fungsi probabilitas untuk variabel acak diskrit, kondisi berikut harus dipenuhi.

1. p(x) ≥ 0 atau 0 ≤ p(x) ≤ 1
2. Σ p(x) = 1

Kita juga bisa menyajika distribusi probabilitas dengan menggunakan grafik.



Fungsi Probabilitas Kumulatif Variabel Acak diskrit

Fungsi probabilitas kumulatif digunakan untuk menyatakan jumlah dari seluruh nilai fungsi probabilitas yang lebih kecil atau sama dengan suatu nilai yang ditetapkan.

Secara matematis, fungsi probabilitas kumulatif dinyatakan sebagai berikut.

F(x) = P(X ≤ x) = X ≤ p(x)

Dimana :

F(x) = P(X ≤ x) menyatakan fungsi probabilitas kumulatif pada titik X = x yang merupakan jumlah dari seluruh nilai fungsi probabilitas untuk nilai X sama atau kurang dari x.

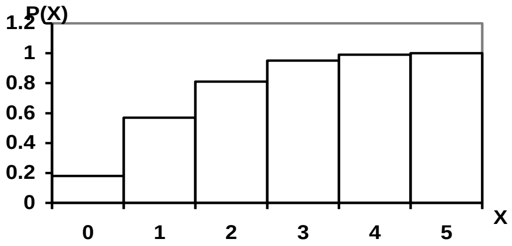
Contoh :

Probabilitas Kumulatif dari jumlah mobil terjual dalam sehari

X	F(x)
0	0,18
1	0,57 (= 0,18 + 0,39)

2	0,81 (= 0,18 + 0,39 + 0,24)
3	0,95 (= 0,18 + 0,39 + 0,24 + 0,14)
4	0,99 (= 0,18 + 0,39 + 0,24 + 0,14 + 0,04)
5	1,00 (= 0,18 + 0,39 + 0,24 + 0,14 + 0,04 + 0,01)

Kita bisa menyajikan fungsi probabilitas kumulatif dalam bentuk grafik, sbb.



DISTRIBUSI PROBABILITAS VARIABEL ACAK KONTINU :

Distribusi probabilitas variabel acak kontinu dinyatakan dengan fungsi f(x) dan sring disebut sebagai fungsi kepadatan atau fungsi kepadatan probabilitas dan bukan fungsi probabilitas. Nilai f(x) bisa lebih besar dari 1.

Fungsi kepadatan probabilitas harus memenuhi syarat sebagai berikut.

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (integral seluruh fungsi kepadatan probabilitas f(x) = 1)
3. P(a < X < b) = $\int_{a}^{b} f(x)dx$

Catatan : f(x) dx = P{x ≤ X ≤ (x + dx)}, yaitu probabilitas bahwa nilai X terletak pada interval x dan x + dx.

Fungsi Probabilitas Kumulatif Variabel Acak Kontinu

Kalau pada variabel acak diskrit, fungsi probabilitas kumulatif dihitung dengan cara penjumlahan maka pada variabel acak kontinu, probabilitas kumulatif dicari dengan integral.

Rumusnya adalah sebagai berikut.

F(x) = P(X ≤ x) = $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

Nilai-nilai dalam rumus ini harus kontinu atau dalam suatu interval.

Contoh :

Suatu variabel acak kontinu X yang memiliki nilai antara X = 1 dan X = 3 memiliki fungsi densitas yang dinyatakan oleh.

$$f(x) = \frac{2(1+x)}{21}$$

Tentukan nilai P(X < 2)!

Penyelesaian :

P(X < 2) = P(1 < X < 2)

$$= \int_{1}^{2} \frac{2(1+x)dx}{21}$$

$$= \frac{1}{21}\left(2x + x^2\right)_1^2 = \frac{5}{21}$$

FUNGSI PROBABILITAS BERSAMA

Bila X dan Y adalah dua variabel acak diskrit, distribusi probabilitas bersamanya dapat dinyatakan sabagai sebuah fungsi f(x,y) bagi sembarang nilai (x,y) yang dapat diambil oleh peubah acak X dan Y. Sehingga dalam rumus variabel acak diskrit.

f(x,y) = p(X = x, Y = y)

Dimana nilai f(x,y) menyatakan peluang bahwa x dan y terjadi secara bersamaan.

Sedangkan distribusi probabilitas kumulatif bersama X dan Y terdiri dari nilai (x,y) dan f(x,y) untuk semua (X,Y)

Fungsi Probabilitas Marjinal

Kalau dua variabel X, Y dan $P(X \leq x, Y \leq y) = p(x,y)$ merupakan suatu fungsi yang memenuhi syarat berikut :

1. $p(x,y) \geq o$, untuk seluruh nilai X dan Y
2. $\sum_x \sum_y p(x,y) = 1$ (penjumlahan untuk seluruh nilai X dan Y)

maka p(x,y) disebut fungsi probabilitas bersama X dan Y.

Fungsi p(x) dan q(y) yang diperoleh langsung dari p(x,y) disebut fungsi marjinal.

$$p(x) = \sum_y p(x,y), \quad dan \quad q(y) = \sum_x p(x,y)$$

Fungsi marjinal p(x) dan q(y) dapat dilihat dalam tabel, pada beris dan kolom yang paling akhir (pada tepi tabel, marjin = tepi/pinggir).

Contoh :

Misalkan kotak berisi 4 kartu bernomor 1, 2, 3, dan 4. Suatu permaianan dilakukan dengan jalan menarik satu kartu dari kotak tersebut secara acak. Apabila kartu yang terambil mempunyai nomr 1, 2, atau 4, maka kartu yang kedua diambil. Akan tetapi kalau kartu bernomor 3 yang terpilih, pengambilan kedua tidak dilakukan.

X = nomor kartu pada pengambilan pertama,

Y = nomor kartu pada pengambilan kedua,

Y = 0 kalau tidak mengambil kartu.

Carilah: p(x, y), p(x), dan q(y).

Penyelesaian :

X = 1, 2, 3, 4 dan p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = …

p(x) = P(X = x)

p(x, y) = P(X = x, Y = y)

p(x, y) = p(x) p(x/y)

Y = 0, 1, 2, 3, 4.

Distribusi Probabilitas Bersama : p(x,y), p(x), dan q(y)

Y / X	0	1	2	3	4	p(x)
1	p(1,0)	p(1,1)	p(1,2)	p(1,3)	p(1,4)	p(1)
2	p(2,0)	p(2,1)	p(2,2)	p(2,3)	p(2,4)	p(2)
3	p(3,0)	p(3,1)	p(3,2)	p(3,3)	p(3,4)	p(3)
4	p(4,0)	p(4,1)	p(4,2)	p(4,3)	p(4,4)	p(4)
q(y)	q(0)	q(1)	q(2)	q(3)	q(4)	

p(1,0) = p(1) p(0/1) = p(X=1) p(0/X=1) = ¼ . 0 = 0

p(1,1) = p(1) p(1/1) = p(X=1) p(1/X=1) = ¼ . ¼= 1/16

p(1,2) = p(1) p(2/1) = p(X=1) p(2/X=1) = ¼ . ¼= 1/16

p(1,3) = p(1) p(3/1) = p(X=1) p(3/X=1) = ¼ . ¼= 1/16

p(1,4) = p(1) p(4/1) = p(X=1) p(4/X=1) = ¼ . ¼= 1/16

p(2,0) = p(2) p(0/2) = p(X=2) p(0/X=2) = ¼ . 0 = 0

p(2,1) = p(2) p(1/2) = p(X=2) p(1/X=2) = ¼ . ¼= 1/16

p(2,2) = p(2) p(2/2) = p(X=2) p(2/X=2) = ¼ . ¼= 1/16

p(2,3) = p(2) p(3/2) = p(X=2) p(3/X=2) = ¼ . ¼= 1/16

p(2,4) = p(2) p(4/2) = p(X=2) p(4/X=2) = ¼ . ¼= 1/16

p(3,0) = p(3) = p(X=3) = ¼

p(3,1) = p(3,2) = p(3,3) = p(3,4) = 0,tak mungkin terjadi, sebab tak mengambil kartu kedua.

p(4,0) = p(4) p(0/4) = p(X=4) p(0/X=4) = ¼ . 0 = 0

$p(4,1) = p(4)\ p(1/4) = p(X=4)\ p(1/X=4) = ¼ . ¼ = 1/16$

$p(4,2) = p(4)\ p(2/4) = p(X=4)\ p(2/X=4) = ¼ . ¼ = 1/16$

$p(4,3) = p(4)\ p(3/4) = p(X=4)\ p(3/X=4) = ¼ . ¼ = 1/16$

$p(4,4) = p(4)\ p(4/4) = p(X=4)\ p(4/X=4) = ¼ . ¼ = 1/16$

p(1) = p(1,0) + p(1,1) + p(1,2) + p(1,3) + p(1,4)

= 0 + 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16

= 4/16

p(2) = p(2,0) + p(2,1) + p(2,2) + p(2,3) + p(2,4)

= 0 + 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16

= 4/16

p(3) = p(3,0) + p(3,1) + p(3,2) + p(3,3) + p(3,4)

= 1/4 + 0 + 0 + 0 + 0

= 1/4

p(4) = p(4,0) + p(4,1) + p(4,2) + p(4,3) + p(4,4)

= 0 + 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16

= 4/16

q(0) = p(1,0) + p(2,0) + p(3,0) + p(4,0)

= 0 + 0 +1/4 + 0

= 4/16

q(1) = p(1,1) + p(2,1) + p(3,1) + p(4,1)

= 1/16 + 1/16 + 0 + 1/16

= 3/16

q(2) = p(1,2) + p(2,2) + p(3,2) + p(4,2)

= 1/16 + 1/16 + 0 + 1/16

= 3/16

q(3) = p(1,3) + p(2,3) + p(3,3) + p(4,3)

= 1/16 + 1/16 + 0 + 1/16

= 3/16

q(4) = p(1,4) + p(2,4) + p(3,4) + p(4,4)

= 1/16 + 1/16 + 0 + 1/16

= 3/16

Perhitungan Fungsi Probabilitas Marjinal

Y \ X	0	1	2	3	4	p(x)
1	0	1/16	1/16	1/16	1/16	4/16
2	0	1/16	1/16	1/16	1/16	4/16
3	¼	0	0	0	0	4/16
4	0	1/16	1/16	1/16	1/16	4/16
q(y)	4/16	3/16	3/16	3/16	3/16	16/16

NILAI HARAPAN DAN VARIANS DARI VARIABEL ACAK DISKRIT

Rata-rata (μ) dari distribusi probabilitas adalah nilai harapan dari variabel acaknya.

Nilai harapan variabel acak diskrit adalah rata-rata tertimbang terhadap seluruh kemungkinan hasil dimana penimbangnya adalah nilai probabilitas yang dihubungkan dengan setiap hasil.

Nilai harapan diperoleh dengan menyatakan setiap kemungkinan hasil x dengan probabilitasnya P(X) dan kemudian menjumlahkan hasil perkalian tersebut.

Nilai harapan dari variabel acak diskrit X yang dinotasikan dengan E(X) dirumuskan sebagai berikut.

$$E(X) = \mu_x = \sum_{i=1}^{N} x_i \; p(x_i)$$

$$= x_1\, p(x_1) + x_2\, p(x_2) + \ldots + x_N\, p(x_N)$$

dimana.

x_i = nilai ke-i dari variabel acak X

$p(x_i)$ = probabilitas terjadinya x_i

Contoh :

X = banyaknya pesanan barang dalam satuan yang masuk selama 1 minggu. P(X) = probabilitas terjadinya X = x.

X	0	1	2	3
p(x)	0,125	0,375	0,375	0,125

Hitung rata-rata banyaknya pesanan atau pesanan yang diharapkan.

Penyelesaian :

$$\mu_X = E(X) = \sum x_i \; p(x_i)$$

= (0) p(0) + (1) p(1) + (2) p(2) + (3) p(3)

= (0) (0,125) + (1) (0,375) + (2) (0,375) + (3) (0,125)

= 1,5

Jadi secara rata-rata dapat diharapkan bahwa pesanan yang masuk selama 1 minggu adalah sebanyak 1,5 satuan.

Selain rata-rata, ukuran statistik yang lain adalah varians dan standar deviasi.

Varians (σ^2) dari variabel acak diskrit didefinisikan sebagai berikut.

Varians dari variabel acak diskrit adalah rata-rata tertimbang dari kuadrat selisih antara kemungkinan hasil dan rata-ratanya dimana penimbangnya adalah probabilitas dari masing-masing hasil tersebut.

Varians diperoleh dengan mengalikan setiap kemungkinan kuadrat selisih $(x_i - \mu)^2$ dengan probabilitasnya $p(x_i)$ dan kemudian menjumlahkan seluruh hasil perkalian tersebut. Sehingga varians dinyatakan sebagai berikut.

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2 \; p(x_i)$$

dimana:

x_i = nilai ke-I dari variable acak X

$p(x_i)$ = probabilitas terjadinya x_i

Standar deviasi σ diperoleh dengan menarik akar dari σ^2.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum (x_i - \mu)^2 \; p(x_i)}$$

Contoh.1 :

X = banyaknya pesanan barang dalam satuan yang masuk selama 1 minggu. P(X) = probabilitas terjadinya X = x.

X	0	1	2	3
p(x)	0,125	0,375	0,375	0,125

Hitunglah varians dan standar deviasinya!

Penyelesaian :

Dari hasil perhitungan sebelumnya $E(X) = \mu_x = 1,5$

$$\sigma^2 = E(X - \mu_x)^2$$

$$= E(X - 1,5)^2$$

$$= \Sigma(x_i - 1,5)^2\, p(x_i)$$

$$= (0 - 1,5)^2\,(0,125) + (1 - 1,5)^2\,(0,375) + (2 - 1,5)^2\,(0,375) + (3 - 1,5)^2\,(0,125)$$

$$= (2,25)\,(0,125) + (0,25)\,(0,375) + (0,25)\,(0,375) + (2,25)\,(0,125)$$

$$= 0,28 + 0,09 + 0,09 + 0,28$$

$$= 0,74$$

$$\sigma = \sqrt{0,74} = 0,86$$

Karena simpangan baku $\sigma = 0,86$, ini berarti bahwa rata-rata jarak nilai X terhadap $\mu = E(X)$ adalah sebesar 0,86.

Contoh.2 :

Seorang penjual mobil sebagai "Agen Tunggal" merek tertentu, berdasarkan pengalamannya dpat menjual sebanyak X dengan probabilitas sebesar p(x) selama satu minggu. Data yang dia miliki adalah sebagai berikut.

X	1	2	3	4	5	6
p(x)	0,08	0,27	0,10	0,10	0,33	0,22

Berapa banyak mobil yang dia harapkan dapat terjual selama satu minggu? Hitung juga simpangan bakunya!

Penyelesaian :

$$E(X) = \Sigma\, x\, p(x)$$

$$= (1)\,(0,08) + (2)\,(0,27) + \ldots. + (6)\,(0,22)$$

$$= 4,29$$

Kita membayangkan bahwa apabila penjualan dilakukan berkali-kali dari minggu ke minggu dalam jumlah yang banyak sekali, maka secara rata-rata dapat dijual sebanyak 4,29 mobil.

Apabila penjualan dilakukan selama 500 minggu (N = 500), maka selama waktu tersebut diharapkan dapat terjual sebanyak N x E(X) = 500 x 4,29 = 2145 mobil.

$\sigma^2 = \Sigma\ (x_i - \mu_x)^2\ p(x_i)$

$= \Sigma(x_i - 4,29)^2\ p(x_i)$

$= (1 - 4,29)^2\ (0,08) + (2 - 4,29)^2\ (0,27) + \ldots\ldots + (6 - 4,29)^2\ (0,22)$

$= 3,27$

$$\sigma = \sqrt{3,27} = 1,81$$

Nilai Harapan dari Fungsi Probabilitas Bersama

Jika fungsi probabilitas bersama dinotasikan dengan p(x, y) untuk variabel acak X dan Y, maka nilai harapan dari variabel acak h(x, y) yang merupakan fungsi dari X dan Y adalah sebagai berikut.

$$E[h(x, y)] = \Sigma\Sigma h(x, y)\ p(x, y)$$

Dimana.

h(x, y) adalah sembarang fungsi dari X dan Y

p(x, y) adalah probabilitas terjadinya X dan Y secara bersama-sama.

Kalau h(x, y) = xy, maka

$$E[h(x, y)] = E(XY) = \Sigma\Sigma xy\ p(x, y)$$

Kalau h(x, y) = x + y, maka

$$E[h(x, y)] = E(X + Y) = \Sigma\Sigma(x + y)\ p(x, y)$$

Contoh :

Apabila diketahui p(x,y) sebagai berikut.

Y / X	0	1	2	3	4	p(x)

2	0	O,1	0,1	0,2	0	0,4
3	0,1	0	0,1	0	0,2	0,4
4	0,1	0,1	0	0	0	0,2
q(y)	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	1,0

a). Carilah nilai E(X + Y)

b). Carilah nilai E(X) + E(Y), apakah hasilnya sama dengan hasil a?

c). Carilah nilai E(XY)

Penyelesaian :

a). E(X + Y) = ΣΣ (x + y) p(x,y)

= (2 + 0)(0) + (2 + 1)(0,1) + (2 + 2)(0,1) + (2 + 3)(0,2) +

(2 + 4)(0) + (3 + 0)(0,1) + (3 + 1)(0) + (3 + 2)(0,1) +

(3 + 3)(0) + (3 + 4)(0,2) + (4 + 0)(0,1) + (4 + 1)(0,1) +

(4 + 2)(0) + (4 + 3)(0) + (4 + 4)(0)

= 2(0) + 3(0,1) + 4(0,1) + 5(0,2) + 6(0) + 3(0,1) + 4(0) + 5(0,1) +

6(0) + 7(0,2) + 4(0,1) + 5(0,1) + 6(0) + 7(0) + 8(0)

= 4,8

b). E(X) = Σ x p(x)

= 2(0,4) + 3(0,4) + 4(0,2)

= 2,8

E(Y) = Σ y p(y)

= 0(0,2) + 1(0,2) + 2(0,2) + 3(0,2) + 4(0,2)

= 2

E(X) + E(Y) = 2,8 + 2 = 4,8

c). E(XY) = ΣΣ xy p(x,y)

$= (0)(0) + (2)(0,1) + (4)(0,1) + (6)(0,2) + (8)(0) + (0)(0,1) +$

$(3)(0) + (6)(0,1) + (9)(0) + (12)(0,2) + (0)(0,1) + (4)(0,1) +$

$(8)(0) + (12)(0) + (16)(0)$

$= 5,2$

Aturan-aturan dalam Menghitung Nilai Harapan.

1. $E(k) = k$, k = bilangan konstan.
2. Varians (k) = 0 dan varians (X) = σ^2
3. $E(kX) = k\,E(X)$
4. Varians (kX) = $k^2\sigma^2$
5. $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
   $E(\Sigma X_i) = \Sigma E(X_i)$ $i = 1, 2, \ldots, n$

   $E(\Sigma k_i X_i) = \Sigma k_i E(X_i)$ $i = 1, 2, \ldots, n$

KOVARIANS DAN APLIKASINYA DALAM KEUANGAN

Pada sub bab ini, kita pelajari konsep kovarians antara dua variabel dan kegunaannya dalam manajemen portfolio dan keuangan.

Kovarians

Kovarians adalah suatu pengukur yang menyatakan variasi bersama dari dua variable acak. Kovarians antara dua variabel acak diskrit X dan Y dinotasikan dengan σ_{xy} dan didefinisikan sebagai berikut.

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^{N} [X_i - E(X)][Y_i - E(Y)]\, p(x_i, y_i)$$

dimana.

X_i = nilai variable acak X ke-i

Y_i = nilai variable acak Y ke-i

$P(x_i, y_i)$ = probabilitas terjadinya x_i dan y_i

$i = 1, 2, \ldots, N$

Contoh :

Anggaplah bahwa anda akan memutuskan dua laternatif/pilihan investasi pada tahun mendatang. Kedua macam investasi tersebut ditanamkan pada 2 jenis perusahaan yang sudah go public, katakana perusahaan A dan perusahaan B. Misalkan anda memperkirakan pengembalian investasi (untuk setiap investasi $1000) dan 3 kondisi perekonomian di mana setiap kondisi perekonomian diberikan nilai probabilitasnya.

$P(x_i,y_i)$	Kondisi Perekonomian	Investasi	
		A	B
(0,2)	Resesi	-$100	-$200
(0,5)	Perekonomian yg stabil	+100	+50
(0,3)	Perekonomian maju	+250	+350

Hitunglah nilai harapan dari pengembalian investasi (*expected return*) untuk setiap investasi dan kovarians dari investasi tersebut.

Penyelesaian :

Jika X = investasi di perusahaan A, Y = investasi di perusahaan B.

$E(X) = \mu_x = (-100)(0,2) + (100)(0,5) + (250)(0,3) = \$105$

$E(Y) = \mu_y = (-200)(0,2) + (50)(0,5) + (350)(0,3) = \$90$

$Var(X) = \sigma_x^2 = (0,2)(-100 – 105)^2 + (0,5)(100 – 105)^2 + (0,3)(250 – 105)^2$

$= 14.725$

$\sigma_x = 121,35$

$Var(Y) = \sigma_y^2 = (0,2)(-200 – 90)^2 + (0,5)(50 – 90)^2 + (0,3)(350 – 90)^2$

$= 37.900$

$\sigma_y = 194,68$

$Kov(xy) = \sigma_{xy} = (0,2)(-100 – 105) (-200 – 90) + (0,5)(100 – 105) (50 – 90)$

$(0,3)(250 – 105) (350 – 90)$

$= 11.890 + 100 + 11.310$

$\sigma_{xy} = 23.300$

Jadi perusahaan A memiliki harapan pengembalian investasi yang lebih tinggi dibandingkan dengan perusahaan B dan juga mempunyai standar deviasi yang lebih rendah. Nilai kovarians sebesar 23.300 antara kedua jenis investasi menunjukkan adanya hubungan positif yang kuat, di mana kedua jenis investasi saling berhubungan satu sama lain dalam arah yang sama. Kalau investasi jenis A meningkat maka B juga meningkat.

Nilai Harapan dari Penjumlahan Dua Variabel

Nilai harapan dari penjumlahan dua variable acak adalah sama dengan penjumlahan dari nilai harapan masing-masing variabel acak.

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Varians dari Penjumlahan Dua Variabel

Varians dari penjumlahan dua variabel acak adalah sama dengan jumlah varians dari masing-masing variabel ditambah dua kali kovarians.

$$Var(x+y) = \sigma^2_{x+y} = \sigma^2_x + \sigma^2_y + 2\sigma_{xy}$$

Standar Deviasi dari Penjumlahan dua Variabel.

$$\sigma_{x+y} = \sqrt{\sigma^2_{x+y}}$$

Contoh :

Anggaplah bahwa anda akan memutuskan dua laternatif/pilihan investasi pada tahun mendatang. Kedua macam investasi tersebut ditanamkan pada 2 jenis perusahaan yang sudah *go public*, katakana perusahaan A dan perusahaan B. Misalkan anda memperkirakan pengembalian investasi (untuk setiap investasi $1000) dan 3 kondisi perekonomian di mana setiap kondisi perekonomian diberikan nilai probabilitasnya.

$P(x_i,y_i)$	Kondisi Perekonomian	Investasi	
		A	B
(0,2)	Resesi	-$100	-$200

(0,5)	Perekonomian yg stabil	+100	+50
(0,3)	Perekonomian maju	+250	+350

Hitunglah nilai harapan varians dan standar deviasi dari penjumlahan kedua investasi tersebut!

Penyelesaian :

Jika X = investasi perusahaan A, Y = investasi perusahaan B

E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 105 + 90 = $195

$\sigma^2_{x+y} = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\sigma_y$

$= 14.725 + 37.900 + (2)(23.300)$

$= 99.225$

σ_{x+y} = $315

Portfolio Expected Return dan Fortfolio Risk

Setelah kita definisikan kovarians, expected return, dan standar deviasi dari penjumlahan dua variabel acak, kita dapat menerapkan konsep-konsep tersebut pada studi mengenai sekelompok asset yang merujuk pada apa yang disebut sebagai portfolio. Dengan menanamkan investasi yang disebarkan pada tidak hanya satu perusahaan, investor mengkombinasikan pengembalian dan meminimumkan resiko. Dalam studi portfolio, kita menggunakan penimbang untuk setiap jenis investasi dengan proporsi asset pada investasi tersebut. Hal ini memungkinkan kita untuk menghitung portfolio expected return dan portfolio risk.

Portfolio expected return untuk investasi dua asset sama dengan penimbang bagi asset X dikalikan dengan expected return dari asset X ditambah dengan penimbang bagi asset Y dikalikan dengan expected return asset Y.

$$E(P) = \omega E(X) + (1 - \omega)\, E(Y)$$

Dimana.

E(P) = portfolio expected return

ω = proporsi nilai portfolio dari asset X

$(1 - \omega)$ = proporsi nilai portfolio dari asset Y

E(X) = expected return asset X

E(Y) = expected return asset Y

Portfolio Risk

$$\sigma_p = \sqrt{\omega^2\sigma_x^2 + (1-\omega)^2\sigma_y^2 + 2\omega(1-\omega)\sigma_{xy}}$$

Contoh :

Dari contoh diatas, kita telah menghitung E(X), E(Y), σ_x^2, σ_y^2. Misalkan kita hendak membentuk sebuah portfolio dari dua investasi tersebut dengan menanamkan investasi yang sama dalam setiap asset tersebut. Hitunglah *portfolio expected* return dan *portfolio risk*.

Penyelesaian :

Dengan menggunakan persamaan diatas dimana ω = 0,50, E(X) = 105, E(Y) = 90, σ_x^2 = 14.725, σ_y^2 = 37.900 dan σ_{xy} = 23.300, maka

E(P) = (0,5)(105) + (1 – 0,5)(90) = $97,50

$$\sigma_p = \sqrt{\omega^2\sigma_x^2 + (1-\omega)^2\sigma_y^2 + 2\omega(1-\omega)\sigma_{xy}}$$

σ_p = $157,50

Jadi portfolio mempunyai expected return sebesar $97,50 untuk setiap investasi sebesar $1000 (pengembalian sebesar 9,95%), tetapi memiliki portfolio risk sebesar $157,50. Dalam hal ini portfolio risk lebih tinggi dari pada expected return.

DISTRIBUSI TEORITIS

Distribusi teoritis merupakan alat bagi kita untuk menentukan apa yang dapat kita harapkan, apabila asumsi-asumsi yang kita buat benar. Distribusi teoritis memungkinkan para pembuat keputusan untuk memperoleh dasar logika yang kuat di dalam keputusan, dan sangat berguna sebagai dasar pembuatan ramalan berdasarkan informasi yang terbatas atau pertimbangan-pertimbangan teoritis, dan berguna pula untuk menghitung probabilitas terjadinya suatu kejadian.

Setiap kejadian yang dapat dinyatakan sebagai perubahan nilai suatu variabel, umumnya mengikuti suatu distribusi teoritis tertentu dan apabila sudah ketahuan jenis distribusinya, kita dengan mudah dapat mengetahui besarnya nilai probabilitas terjadinya kejadian tersebut.

Beberapa distribusi teoritis yang akan dibahas dalam bab ini, antara lain Distribusi binomial, Distribusi Poisson, Distribusi Hipergeometrik, Distribusi Multinomial, Distribusi Normal, Distribusi Kai-Kuadrat(Chi-Square), Distribusi F, dan Distribusi t.

DISTRIBUSI BINOMIAL :

Distribusi binomial atau distribusi Bernoulli adalah suatu distribusi teoritis yang menggunakan variabel acak diskrit yang terdiri dari dua kejadian yang berkomplemen, seperti sukses-gagal, baik-cacat.

Pada umumnya suatu eksperimen dapat dikatakan eksperimen Binomial apabila memenuhi syarat sebagai berikut.

1. Setiap percobaan menghasilkan dua kejadian:
   (a) kelahiran anak: laki-laki-perempuan;

   (b) transaksi saham: jual- beli,

   (c) perkembangan suku bunga: naik–turun dan lain-lain.
2. Setiap eksperimen mempunyai dua hasil yang dikatagorikan menjadi “sukses” dan “gagal”.
3. Probabilitas suatu kejadian untuk suskes atau gagal adalah tetap untuk setiap kejadian. P(p), peluang sukses, P(q) peluang gagal, dan P(p) + P(q)= 1.
4. Probabilitas sukses sama pada setiap eksperimen.
5. Eksperimen tersebut harus bebas satu sama lain, artinya hasil eksperimen yang satu tidak mempengeruhi hasil eksperimen lainnya.
6. Data yang dihasilkan adalah data perhitungan.

<u>Contoh:</u>

Suatu eksperimen Binomial, yang terdiri dari pengambilan satu bola secara acak dari kotak yang berisi 30 bola merah(= 30M) dan 70 bola putih(= 70P). Y adalah variabel acak dengan nilai sebagai berikut.

$$Y = \begin{cases} 1, \text{ kalau bola merah yang terambil} \\ 0, \text{ kalau bola putih yang terambil} \end{cases}$$

P(M) = p = probabilitas untuk mendapat bola merah (sukses)

$$= \frac{30}{100} = 0{,}30$$

P(P) = q = probabilitas untuk mendapat bola putih (gagal)

$$= \frac{70}{100} = 0{,}70$$

E(Y) = 1(p) + 0(q)

= 1(0,3) + 0(0,7)

= 0,3

Bila dilakukan eksperimen empat kali. Pengambilan bola dilakukan dengan pengembalian bola yang terambil. Hal ini untuk menjaga agar eksperimen yang satu tidak mempengaruhi hasil eksperimen yang lain. Eksperimen ini akan menghasilkan 2^4 = 16 hasil sebagai berikut.

1. MMMM
2. MMMP
3. MMPM
4. MMPP
5. MPMM
6. MPMP
7. MPPM
8. MPPP
9. PMMM
10. PMMP
11. PMPM
12. PMPP
13. PPMM
14. PPMP
15. PPPM
16. PPPP

Masing-masing hasil eksperimen terdiri dari empat kejadian yang bebas satu sama lain, sehingga probabilitas terjadinya setiap hasil eksperimen merupakan hasil kali probabilitas masing-masing kejadian, misalnya P(MMPM) = ppqp = (0,3)(0,3)(0,7)(0,3) = 0,0189.

Aturan perkalian untuk kejadian-kejadian bebas dan aturan penjumlahan untuk kejadian-kejadian yang saling meniadakan, yang sudah dibahas sebelumnya dapat diterapkan di sini dan perhitungannya adalah.

P(3M dan 1P) = P(MMMP) + P(MMPM) + P(MPMM) + P(PMMM)

$= (0,3)(0,3)(0,3)(0,7) + (0,3)((0,3)(0,7)(0,3) + (0,3)(0,7)(0,3)(0,3)$

$+ (0,7)(0,3)(0,3)(0,3)$

$= 0,0756$

Tanpa memperhatikan urutan dari masing-masing kejadian, setiap suku dalam penjumlahan tersebut mempunyai probabilitas sebesar pppq = p^3q. Dengan cara yang sederhana ini, kita dapat menghitung probabilitas untuk mendapatkan sejumlah bola merah tertentu sebagai hasil eksperimen.

Dapat ditunjukkan bahwa apabila eksperimen dilakukan sebanyak 4 kali, maka.

$X = 0, 1, 2, 3, 4$

Sedangkan untuk n kali.

$X = 0, 1, 2, \ldots, n.$

Apabila semua nilai probabilitas X sebagai hasil suatu eksperimen kita hitung, akan kita peroleh distribusi probabilitas X dan disebut distribusi probabilitas Binomial.

$P(X = 0) = P(PPPP) = (0,7)(0,7)(0,7)(0,7) = (0,7)^4 = 0,2401$

$P(X = 1) = pq^3 + qpq^2 + q^2pq + q^3p$

$= (0,3)(0,7)^3 + (0,7)(0,3)(0,7)^2 + (0,7)^2(0,3)(0,7) +$

$(0,7)^3(0,3)$

$= 0,4116$

$P(X = 2) = p^2q^2 + pqpq + pq^2p + qp^2q + qpqp + q^2p^2$

$= (0,3)^2(0,7)^2 + (0,3)(0,7)(0,3)(0,7) + (0,3)(0,7)^2(0,3) +$

$(0,7)(0,3)^2(0,7) + (0,7)(0,3)(0,7)(0,3) + (0,7)^2(0,3)^2$

$= 0,2646$

$P(X = 3) = p^3q + p^2qp + pqp^2 + qp^3$

$= (03)^3(0,7) + (0,3)^2(0,7)(0,3) + (0,3)(0,7)(0,3)^2 +$

$(0,7)(0,3)^3$

$= 0,0756$

$P(X = 4) = P(MMMM) = p^4 = (0,3)^4 = 0,0081$

Dari contoh soal diatas, dapat disimpulkan bahwa dalam dalam distribusi probabilitas binomial, dengan n percobaan, berlaku rumus berikut.

P_r(x sukses, dalam n percobaan) = $p^x\, q^{n-x}$

Dimana x = 0, 1, 2, 3, …, n

p = probabilitas sukses.

q = (1-p) = probabilitas gagal

Aturan umum permutasi dapat digunakan untuk memperoleh banyaknya kemungkinan urutan yang berbeda, dimana masing-masing urutan terdapat x sukses, misalnya x = 3 (= 3 sukses) : MMMP, MMPM, MPMM, PMMM.

Apabila suatu himpunan yang terdiri dari n elemen dibagi dua, yaitu x sukses dan (n – x) gagal, maka banyaknya permutasi dari n elemen yang diambil x setiap kali dapat dihitung berdasarkan rumus kombinasi berikut.

$$ {}_{n}P_{(n,n-x)} = \frac{n!}{x!(n-x)!} = {}_{n}C_{x} $$

disebut koefisien Binomial(merupakan kombinasi dari n elemen yang diambil x setiap kali)

Masing-masing probabilitas pada distribusi Binomial dihitung sebagai berikut.

$$ p_r(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}\, p^x q^{n-x} $$

x = 0, 1, 2, …, n

$p_r(x)$ dari rumus diatas, merupakan fungsi probabilitas, karena.

a). $p_r(x) \geq 0$, untuk semua x, sebab $\frac{n!}{x!(n-x)!} \geq 0$ dan $p^x\, q^{n-x} \geq 0$

b). $\sum_{x} p_r(x)$ = 1, untuk semua x.

<u>Contoh :</u>

Seorang penjual mengatakan bahwa di antara seluruh barang dagangannya yang dibungkus rapi, ada yang rusak sebanyak 20%. Seorang membeli barang tersebut sebanyak 8 buah dan dipilihnya secara acak. Kalau X = banyaknya barang tidak rusak(bagus) maka.

a). Hitung semua probabilitas untuk memperoleh X.

b). Buat probabilitas kumulatif.

c). Berapa probabilitasnya bahwa dari 8 buah barang yang dibeli, ada 5 yang rusak.

d). $P(X \le 5)$, $P(2 \le X < 5)$, $P(X \le 8)$, $P(X \ge 4)$.

Penyelesaian :

a). Probabilitas untuk memperoleh X.

$$p_r(X = 0) = \frac{8!}{0!(8-0)!}(0{,}8)^0(0{,}2)^8 = 0{,}0000$$

$$p_r(X = 1) = \frac{8!}{1!(8-1)!}(0{,}8)^1(0{,}2)^7 = 0{,}0001$$

$$p_r(X = 2) = \frac{8!}{2!(8-2)!}(0{,}8)^2(0{,}2)^6 = 0{,}0011$$

$$p_r(X = 3) = \frac{8!}{3!(8-3)!}(0{,}8)^3(0{,}2)^5 = 0{,}0092$$

$$p_r(X = 4) = \frac{8!}{4!(8-4)!}(0{,}8)^4(0{,}2)^4 = 0{,}0459$$

$$p_r(X = 5) = \frac{8!}{5!(8-5)!}(0{,}8)^5(0{,}2)^3 = 0{,}1468$$

$$p_r(X = 6) = \frac{8!}{6!(8-6)!}(0{,}8)^6(0{,}2)^2 = 0{,}2936$$

$$p_r(X = 7) = \frac{8!}{7!(8-7)!}(0{,}8)^7(0{,}2)^1 = 0{,}3355$$

$$p_r(X = 8) = \frac{8!}{8!(8-8)!}(0{,}8)^8(0{,}2)^0 = 0{,}1678$$

b). Probabilitas Kumulatif.

$P(X \leq 0) = 0,0000$

$P(X \leq 1) = 0,0000 + 0,0001 = 0,0001$

$P(X \leq 2) = 0,0001 + 0,0011 = 0,0012$

$P(X \leq 3) = 0,0011 + 0,0092 = 0,0104$

$P(X \leq 4) = 0,0104 + 0,0459 = 0,0563$

$P(X \leq 5) = 0,0563 + 0,1468 = 0,2031$

$P(X \leq 6) = 0,2031 + 0,2936 = 0,4967$

$P(X \leq 7) = 0,4967 + 0,3355 = 0,8322$

$P(X \leq 8) = 0,8322 + 0,1678 = 1,0000$

c). 5 rusak, berarti $x = 3$

$P(X = 3) = 0,0092$ (lihat jawaban a)

d). $P(X \leq 5) = 0,2031$ (lihat jawaban b)

$P(2 \leq X < 5) = p_r(X = 2) + p_r(X = 3) + p_r(X = 4)$

$= 0,0011 + 0,0092 + 0,0459$

$= 0563$

$P(X \leq 8) = 1$ (lihat jawaban b)

$P(X \geq 4) = p_r(X = 4) + p_r(X = 5) + p_r(X = 6) + p_r(X = 7) +$

$p_r(X = 8)$

$= 0,0459 + 0,1468 + 0,2936 + 0,3355 + 0,1678$

$= 0,9896$

Apabila nilai n makin besar, perhitungan probabilitas Binomial dalam prakteknya harus digunakan tabel Binomial.

Dalam tabel tersebut, n = 16, dan p = (0,05), (0,10), (0,15), …, (0,50). Apabila p > 0,50, maka persoalannya harus dibalik, yaitu menjadi x gagal dan (n – x) sukses. Dengan demikian, peranan p bukan lagi menjadi probabilitas sukses melainkan probabilitas gagal. Untuk n yang cukup besar dapat digunakan tabel normal.

Rata-rata dan Varians Distribusi Binomial

Kita mengetahui bahwa untuk mencari rata-rata (μ) kita menggunakan rumus.

$$\mu = E(X) = \sum_x x p_r(x)$$

$$= \sum_x x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

dimana x = 1, 2, 3, …, n.

Perhatikan bahwa $X = \Sigma Y_i = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$

Di mana $Y_i \begin{cases} 1, kalau "sukses", sehingga\ p\ (sukses) = p(1) = p \\ 0, kalau "gagal", sehingga\ p\ (gagal) = p(0) = 1 - p = q \end{cases}$

$E(Y_i) = 1(p) + 0(1 - p) = p + 0 = p$, untuk semua i

$E(X) = E(\Sigma Y_i) = \Sigma E(Y_i) = E(Y_1) + E(Y_2) + \ldots + E(Y_n)$

$$= \underbrace{p + p + ... + p}_{n\ kali}$$

$= np$

Jadi rata-rata dari distribusi binomial adalah **np**

Sedangkan untuk menentukan varians dari distribusi binomial, kita menggunakan rumus.

$Var(X) = E\{X - E(X)\}^2$

$= E(X - np)^2$

$= \Sigma (x - np)^2 p(x)$

$Var(Y) = E\{X - E(Y)\}^2$

$= E(Y - p)^2$

$= \Sigma\ (x - p)^2\ p(y)$

$= (1 - p)^2\ (p) + (0 - p)^2\ (1 - p)$

$= (1 - p)^2\ p + p^2\ (1 - p)$

$= p(1 - p)\ (1 - p + p)$

$= p(1 - p)$

$= pq$

$Var(X) = Var(\Sigma Y_i)$

$= \Sigma\ Var(Y_i)$

$= V(Y_1) + V(Y_2) + \ldots + V(Y_n)$

$$= \underbrace{pq + pq + \ldots + pq}_{n\ kali} = npq$$

jadi varians dari distribusi binomial adalah **npq**.

Dengan demikain, dapat disimpulkan bahwa untuk variabel X yang mengikuti distribusi binomial berlaku rumus berikut.

$\mu = E(X) = np$

$\sigma^2 = E[X - E(X)\}^2 = E(X - np)^2 = npq$

$\sigma = \sqrt{npq}$

Contoh :

Suatu mata uang logam Rp. 50 dilemparkan ke atas sebanyak 4 kali, dimana probabilitas munculnya gambar p(B) sama dengan probabilitas munculnya gambar bukan burung $p(\bar{B}) = \frac{1}{2}$. Jika X = banyaknya gambar burung (B) yang muncul, carilah nilai rata-rata {E(X)} dan simpangan bakunya (σ) dengan menggunakan cara :

a). Perhitungan secara langsung.

b). Dengan menggunakan rumus E(X) = np, σ = $\sqrt{npq}$

Penyelesaian :

a). $\sigma^2 = E\{X - E(X)\}^2$

$E(X) = \Sigma\, x p_r(x)$

$E(X) = (0)(\left(\frac{1}{16}\right) + (1)\left(\frac{4}{16}\right) + (2)\left(\frac{6}{16}\right) + (3)\left(\frac{4}{16}\right) + (4)\left(\frac{1}{16}\right)$

$= (0)(0{,}0625) + (1)(0{,}25) + (2)(0{,}3570) + (3)(0{,}25) +$

$(4)(0{,}0625)$

$= 1{,}964 \approx 2$

Di dalam 4 kali lemparan, diharapkan secara rata-rata memperoleh 2B.

$Var(X) = \sigma^2 = E(X - 2)^2$

$= \Sigma\, (x - 2)2\, p_r(x)$

$= (0 - 2)^2(\left(\frac{1}{16}\right) + (1 - 2)^2\left(\frac{4}{16}\right) + (2 - 2)^2\left(\frac{6}{16}\right) + (3 - 2)^2\left(\frac{4}{16}\right) +$

$(4 - 2)^2\left(\frac{1}{16}\right)$

$= (4)(0{,}0625) + (1)(0{,}25) + (0)(0{,}3570) + (1)(0{,}25) +$

$(4)(0{,}0625)$

$= 1$

$\sigma = \sqrt{1} = 1$

b). $E(X) = np = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

$\sigma^2 = npq = 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$\sigma = \sqrt{1} = 1$

DISTRIBUSI POISSON

Distribusi poisson adalah pengembangan dari distribusi binomial yang mampu mengkakulasikan distribusi probabilitas dengan kemungkinan sukses (p) sangat kecil dan jumlah eksperimen (n) sangat besar.

Karena distribusi poisson biasanya melibatkan jumlah n yang besar, dengan p kecil, distribusi ini biasanya digunakan untuk menghitung nilai probabilitas suatu kejadian dalam suatu selang waktu dan daerah tertentu.

Distribusi Poisson memiliki ciri-ciri sebagai berikut.

1. Banyaknya hasil percobaan yang terjadi dalam suatu interval waktu atau suatu daerah tertentu tidak tergantung pada banyaknya hasil percobaan yang terjadi pada interval waktu atau daerah lain yang terpisah.
2. Probabilitas terjadinya hasil percobaan selama suatu interval waktu yang singkat atau dalam suatu daerah yang kecil, sebanding dengan panjang interval waktu atau besarnya daerah tersebut dan tidak tergantung pada banyaknya hasil percobaan yang terjadi di luar interval waktu atau daerah tersebut.
3. Probabilitas lebih dari satu hasil percobaan yang terjadi dalam interval waktu yang singkat atau dalam daerah yang kecil dapat diabaikan.

Rumus untuk menyelesaikan distribusi Poisson adalah sebagai berikut.

$$P_r(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Dimana λ = rata-rata distribusi

= 0, 1, 2, 3, …(menuju tak hingga)

e = konstanta 2,71828

<u>Contoh:</u>

Seorang yang akan menjual mobil mewahnya memasang iklan pada suatu surat kabar yang dapat mencapai 100.000 pembaca. Dengan anggapan nilai probabilitas bahwa seorang yang membaca iklan tersebut berminat akan membeli mobilnya sebesar p = 1/50.000. Jika dari 100.000 pembaca ada dua orang yang berminat membeli mobil tersebut (p = 0,00002) dan X = banyaknya pembaca yang berminat pada mobil tersebut, berapakah P(X = 0), P(X = 1), P(X = 2), P(X = 3), P(X = 4), ,,,,?

Persoalan ini sebetulnya dapat dipecahkan dengan menggunakan fungsi Binomial, karena persoalannya hanya mencari probabilitas x “sukses” dari n = 100.000 eksperimen dimana probabilitas sukses p = 1/50.000. Akan tetapi karena n terlalu besar dan p terlalu kecil, fungsi Poisson dapat digunakan sebagai suatu pendekatan yang lebih sederhana.

Apabila λ = rata-rata distribusi = E(X) = np = $\frac{100.000}{50.000}$ = 2, (secara rata-rata dapat diharapkan dua orang pembaca yang menanyakan keadaan mobil), maka setelah dilakukan perhitungan, kita akan memperoleh sebagai berikut.

$P_r(X = 0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = 0{,}1353$

$P_r(X = 1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 0{,}2707$

$P_r(X = 2) = \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = 0{,}2707$

$P_r(X = 3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0{,}1804$

$P_r(X = 4) = \frac{2^4 e^{-2}}{4!} = 0{,}0902$

$P_r(X = 5) = \frac{2^5 e^{-2}}{5!} = 0{,}0361$

$P_r(X = 6) = \frac{2^6 e^{-2}}{6!} = 0{,}0120$

$P_r(X = 7) = \frac{2^7 e^{-2}}{7!} = 0{,}0034$

$P_r(X = 8) = \frac{2^8 e^{-2}}{8!} = 0{,}0009$

$$P_r(X = 9) = \frac{2^9 e^{-2}}{9!} = 0{,}0002$$

Perhitungan ini dapat juga dilihat pada tabel Poisson, dimana x = 0, 1, 2, …, 9. Misalnya kita ingin melihat distribusi probabilitas bahwa 5 orang pembaca berminat pada mobil tersebut (p(5) dengan λ atau rata-rata distribusi = 2, perhatikan potongan tabel Poisson berikut.

x	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377
8	0,0000	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033
9	0,0000	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688

Perhatikan kolom 2, dengan λ = 2,0, telusuri ke bawah sampai ke baris x = 5. Disana kita akan menemukan angka 0,0361. Artinya probabilitas 5 orang berminat dari 100.000 pembaca adalah 0,0361, probabilitas 6 orang berminat adalah 0,0120, dan seterusnya.

Distribusi Poisson juga dapat digunakan untuk menghitung probabilitas dari x "sukses" dalam n eksperimen, yang terjadi dalam satuan luas tertentu, satuan isi tertentu, interval waktu tertentu, atau satuan panjang tertentu.

Contoh :

Seorang pemilik pabrik rokok akan melakukan promasi penjualan rokok merk A dengan iklan khusus. Di antara 1.000 batang rokok terdapat 5 batang yang diberi tulisan "berhadia" dan dicampur secara acak dengan rokok lainnya. Setiap pembeli rokok merk A yang memperoleh batang rokok dengan tulisan "berhadia" akan mendapatkan hadiah yang menarik.

Apabila X menyatakan banyaknya batang rokok yang terdapat tulisan "berhadiah" dari satu bungkus rokok merk A yang setiap bungkusnya berisi 20 batang, berapakah P(X = 0), P(X = 1), P(X = 2), P(X = 3), P(X = 4) ?

Penyelesaian :

N = 20 = banyaknya batang rokok per bungkus sebagai sampel acak.

P(batang rokok “berhadiah”) = p(sukses) = p = $\frac{5}{1000}$ = 0,005.

λ = np = 20(0,005) = 0,1

Dari tabel Poisson kita peroleh.

X	0	1	2	3	4
$P_r(x)$	0,9048	0,0905	0,0045	0,0002	0,0000

Probabilitas untuk mendapatkan 4 batang “berhadiah” = 0,0000 (tidak mungkin), sedangkan mendapatkan 1 batang “berhadiah” = 0,0905 (9%)

Contoh :

Seorang Kepala Bagian Kredit dari suatu Bank beranggapan bahwa 4% dari para nasabahnya merasa tidak puas dengan pelayanan bank tersebut. Kemudian 50 orang nasabah dipilih secara acak. X = banyaknya nasabah yang tidak puas.

Hitung $p_r(x)$, untuk x = 0, 1, 2,…,9 dan hitung distribusi kumulatif F(x) = P(X ≤ x).

Penyelesaian :

n = 50

p = 4% = 0,04

λ = np = 50(0,04) = 2

$P_r(0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!}$ = 0,1353

$P_r(1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!}$ = 0,2707

$P_r(2) = \dfrac{2^2 e^{-2}}{2!} = 0{,}2707$

$P_r(3) = \dfrac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0{,}1804$

$P_r(4) = \dfrac{2^4 e^{-2}}{4!} = 0{,}0902$

$P_r(5) = \dfrac{2^5 e^{-2}}{5!} = 0{,}0361$

$P_r(6) = \dfrac{2^6 e^{-2}}{6!} = 0{,}0120$

$P_r(7) = \dfrac{2^7 e^{-2}}{7!} = 0{,}0034$

$P_r(8) = \dfrac{2^8 e^{-2}}{8!} = 0{,}0009$

$P_r(9) = \dfrac{2^9 e^{-2}}{9!} = 0{,}0002$

Distribusi Kumulatif F(x).

$P(X \leq 0) = 0{,}1353$

$P(X \leq 1) = 0{,}1353 + 0{,}2707 = 0{,}4060$

$P(X \leq 2) = 0{,}4060 + 0{,}2707 = 0{,}6767$

$P(X \leq 3) = 0{,}6767 + 0{,}1804 = 0{,}8571$

$P(X \leq 4) = 0{,}8571 + 0{,}0902 = 0{,}9473$

$P(X \leq 5) = 0{,}9473 + 0{,}0361 = 0{,}9834$

$P(X \leq 6) = 0{,}9834 + 0{,}0120 = 0{,}9954$

$P(X \leq 7) = 0{,}9954 + 0{,}0034 = 0{,}9988$

$P(X \leq 8) = 0{,}9988 + 0{,}0009 = 0{,}9997$

$P(X \leq 9) = 0{,}9997 + 0{,}0002 = 0{,}9999$

$P_r(x) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$, x = 0, 1, 2, …

Merupakan fungsi probabilitas, sebab memenuhi syarat berikut:

a. $p_r(x) \geq 0$, sebab $\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \geq 0$

b. $\Sigma p_r(x) = 1$, untuk seluruh x.

Rata-rata dan Varians, Distribusi Poisson

Dapat dibuktikan bahwa untuk distribusi Poisson,

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{x=0}^{\infty} x p_r(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda$$

$$\sigma^2 = \mathrm{E}(\mathrm{X} - \lambda)^2 = \sum_{x=0}^{\infty} (x-\lambda)^2 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda$$

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

dimana :

x = jumlah kejadian sukses

p = probabilitas terjadinya x

λ = rata-rata distribusi

e = konstanta Naperian (2,71828)

DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK :

Distribusi hipergeometrik sangat erat kaitannya dengan distribusi binomial. Perbedaan antara distribusi hipergeometrik dengan binomial adalah bahwa pada distribusi hipergeometrik, percobaan tidak bersifat independent. Artinya antara percobaan yang satu dengan yang lainnya saling berkait. Selain itu probabilitas "SUKSES" berubah(tidak sama) dari percobaan yang satu ke percobaan lainnya.

Untuk mencari probabilitas x sukses dalam ukuran sample n, kita harus memperoleh x sukses dari r sukses dalam populasi, dan n – x gagal dari N – r gagal. Sehingga fungsi probabilitas hipergeometrik dapat dituliskan sebagai berikut.

$$p(x) = \frac{{}^{r}C_{x} \; {}^{N-r}C_{n-x}}{{}^{N}C_{n}}, 0 \leq x \leq r$$

dimana :

p(x) = probabilitas x sukses (atau jumlah sukses sebanyak x)

dalam n percobaan.

n = jumlah percobaan

N = Jumlah elemen dalam populasi

r = jumlah elemen dalam populasi berlabel “SUKSES”

x = Jumlah elemen berlabel “SUKSES” diantara n elemen

percobaan.

Terdapat dua persyaratan yang harus dipenuhi oleh sebuah distribusi Hipergeometrik:

1. Percobaan diambil dari suatu populasi yang terbatas, dan percobaan dilakukan tanpa pengembalian.
2. Ukuran sampel n harus lebih besar dari 5% dari populasi N.

Dari rumus diatas, perhatikan bahwa

$${}^{r}C_{x} = \frac{r!}{x!(r-x)!}$$

$${}^{N-r}C_{n-x} = \frac{(N-r)!}{(n-x)(N-r-n+x)!}$$

$${}^{N}C_{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

<u>Contoh :</u>

Sebuah anggota komite terdiri dari 5 orang, dimana 3 adalah wanita dan 2 laki-laki. Misalkan 2 orang dari 5 orang anggota komite tersebut dipilih untuk mewakili delegasi dalam sebuah konvensi/pertemuan,

(i) Berapa probabilitas bahwa dari pemilihan secara acak didapat 2 orang wanita?
(ii) Berapa probabilitas dari 2 orang yang terpilih adalah 1 laki-laki dan 1 wanita?

Penyelesaian :

Kita dapat menggunakan distribusi hipergeometrik dalam kasus ini, dengan n = 2, N = 5, r = 3 dan x = 2, x = jumlah wanita terpilih.

(i) p(2) = $$\frac{{}^{3}C_{2}\ {}^{2}C_{0}}{{}^{5}C_{2}} = \frac{\left(\frac{3!}{2!\,1!}\right)\left(\frac{2!}{2!\,0!}\right)}{\left(\frac{5!}{2!\,3!}\right)} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

Jadi probabilitas 2 orang wanita terpilih adalah 0,3

(ii) p(1) = $$\frac{{}^{3}C_{1}\ {}^{2}C_{1}}{{}^{5}C_{2}} = \frac{\left(\frac{3!}{1!\,2!}\right)\left(\frac{2!}{1!\,1!}\right)}{\left(\frac{5!}{2!\,3!}\right)} = \frac{3.2}{10} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

Jadi probabilitas terpilih 1 orang wanita dan 1 laki-laki = 0,6

DISTRIBUSI MULTINOMIAL :

Kalau pada distribusi binomial hasil sebuah percobaan hanya dikatagorikan 2 macam yaitu "sukses" dan "gagal", maka dalam distribusi multinomial, sebuah percobaan akan menghasilkan beberapa kejadian (lebih dari 2) yang saling meniadakan/saling lepas. Misalkan ada sebanyak ***k*** kejadian dalam sebuah percobaan, katakana kejadian-kejadian B_1, B_2, …, B_k. Jika percobaan diulang sebanyak n kali dan peluang terjadinya setiap kejadian B konstan/tetap dari setiap percobaan dengan $P(B_i) = P_i$ untuk i = 1, 2, 3, …, k, dan X_1, X_2, X_3, …X_k menyatakan jumlah terjadinya kejadian B_i (i = 1, 2, …, k dalam n percobaan.

Fungsi Distribusi Multinomial

$$p(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_k) = \left[\frac{n!}{x_1!\, x_2!\, x_3! \ldots\ldots x_k!}\right] p_1^{x_1}\, p_2^{x_2}\, p_3^{x_3} \ldots\ldots p_k^{x_k}$$

untuk nilai-nilai

X_1 = 0, 1, 2, ……; X_k = 0, 1, 2, … dan $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$

Dimana

X_1, X_2, ……, X_k menyatakan jumlah dari kejadian B_1, B_2, …….B_k

n menyatakan jumlah percobaan.

P_1, p_2, ..,p_k adalah probabilitas terjadinya kejadian B_1, B_2, ….B_k

Contoh :

Proses pembuatan pensil dalam sebuah pabrik melibatkan banyak buruh dan proses tersebut terjadi berulang-ulang. Pada suatu pemeriksaan terakhir yang dilakukan telah memperlihatkan bahwa 85% produksinya adalah “baik”, 10% ternyata “tidak baik tetapi masih bias diperbaiki” dan 5% produksinya “rusak dan harus dibuang”. Jika sebuah sample acak dengan 20 unit dipilih, berapa peluang jumlah unit “baik” sebanyak 18, unit “tidak baik tetapi bisa diperbaiki” sebanyak 2 dan unit “rusak” tidak ada?

Penyelesaian :

Misalkan,

X_1 = banyaknya unit “baik”

X_2 = banyaknya unit yang “tidak baik tetapi bias diperbaiki”

X_3 = banyaknya unit yang “rusak dan harus dibuang”

X_1 = 18, X_2 = 2, dan X_3 = 0 (syarat $x_1 + x_2 + x_3 = n = 20$)

dan p_1 = 0,85, p_2 = 0,1 dan p_3 = 0,05 maka :

$$p(18,\ 2,\ 0) = \left[\frac{20!}{18!\ 2!\ 0!}\right] (0{,}85)^{18}\ (0{,}1)^{2}\ (0{,}05)^{0}$$

$= 190\ (0{,}85)^{18}\ (0{,}01)$

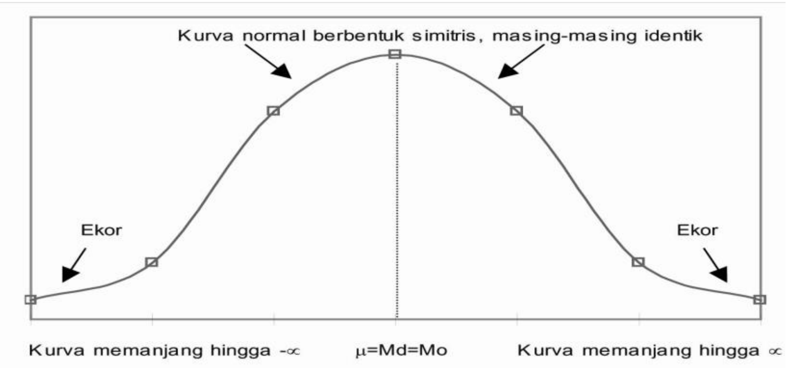
$= 0{,}102$

Jadi peluangnya sebesar 0,102.

DISTRIBUSI NORMAL :

Di antara sekian banyak distribusi, barangkali distribusi normal merupakan distribusi yang secara luas banyak digunakan dalam berbagai penerapan. Distribusi normal merupakan distribusi kontinu yang mensyaratkan variabel yang diukur harus kontinu misalnya tinggi badan, berat badan, dan sebagainya.

Karakteristik Distribusi Kurva Normal :



1. Kurva berbentuk genta (μ= Md = Mo)
2. Kurva berbentuk simetris
3. Kurva normal berbentuk asimptotis
4. Kurva mencapai puncak pada saat X= μ
5. Luas daerah di bawah kurva adalah 1; ½ di sisi kanan nilai tengah dan ½ di sisi kiri.

Persamaan matematika bagi distribusi probabilitas acak normal tergantung pada dua parameter, yaitu μ dan σ atau nilai tengah dan simpangan bakunya. Fungsi kepadatan probabilitas normal dapat dituliskan sebagai berikut.

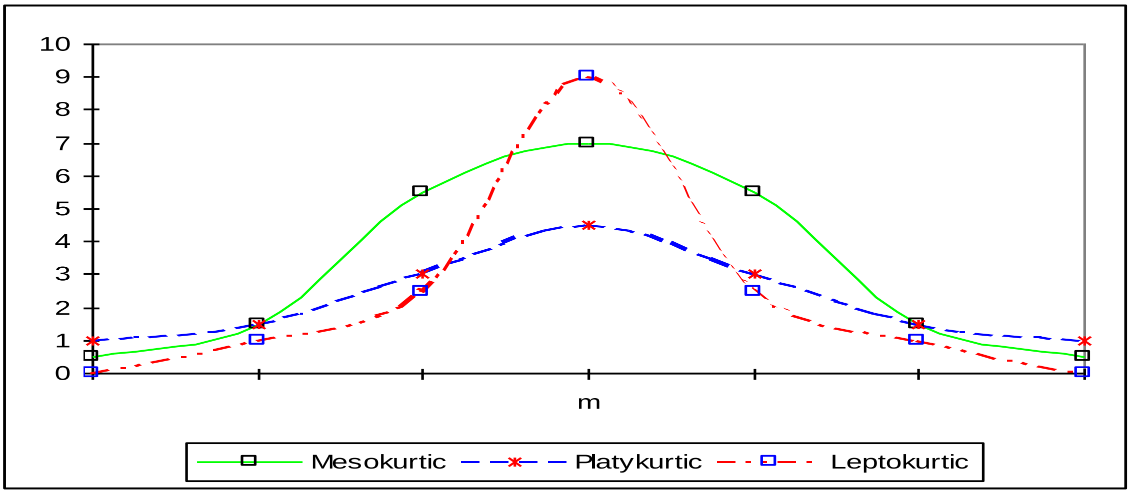
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$, untuk $-\infty < X < \infty$

di mana :

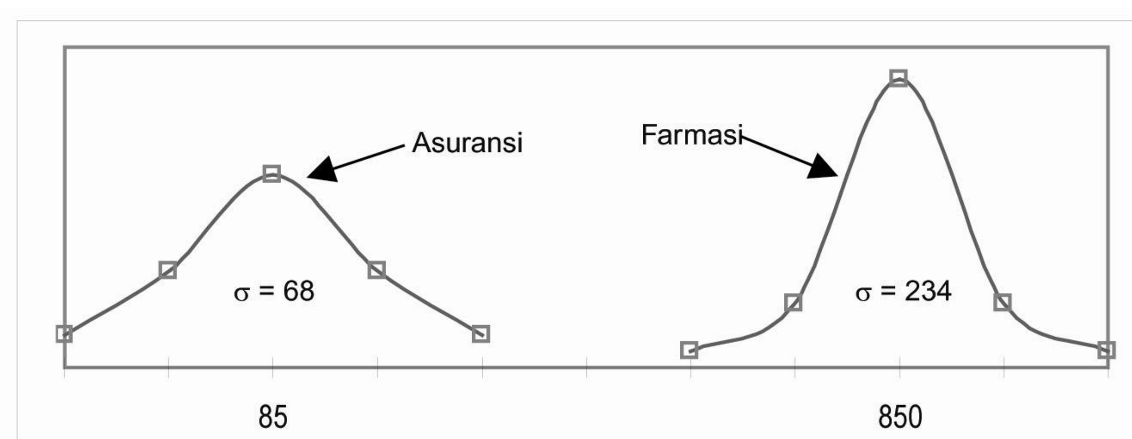
π = 3,14159

e = 2,71828

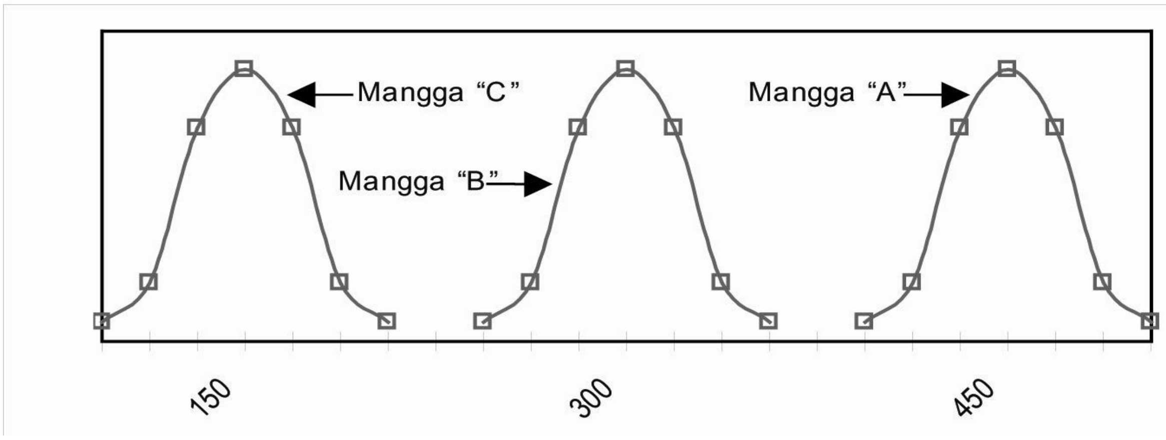
Bila nilai-nilai μ dan σ diketahui, maka kita dapat menggambarkan kurva normal itu dengan pasti. Bagaimanapun bantuk dan ketinggian dari kurva normal sangat tergantung pada dua variabel ini.



Distribusi kurva normal dengan μ sama dan σ berbeda



Distribusi kurva normal dengan μ dan σ berbeda



Distribusi kurva normal dengan μ berbeda dan σ sama

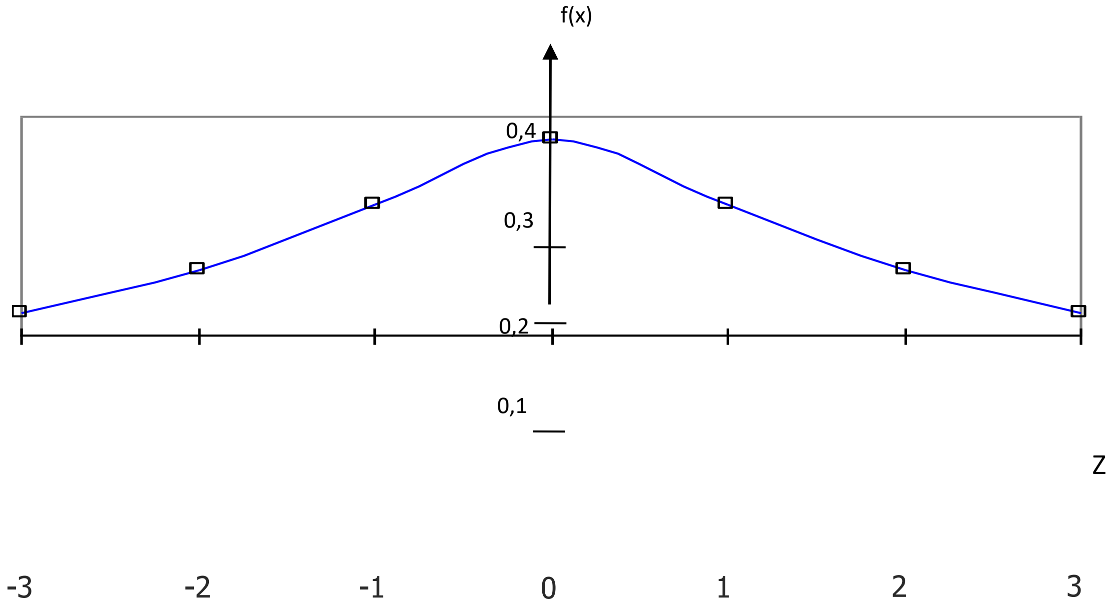
DISTRIBUSI NORMAL STANDAR :

Keluarga distribusi normal memiliki jumlah yang banyak sekali, akibat pengaruh rata-rata dan simpangan baku. Akan tetapi, untuk mencari probabilitas suatu interval dari variabel random kontinu dapat dipermudah dengan menggunakan batuan distribusi normal standar.

Distribusi normal standar adalah distribusi normal yang memiliki rata-rata (μ) = 0 dan simpangan baku (σ) = 1. Bentuk fungsinya adalah.

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2}$$

Dalam bentuk diagram atau kurva (disebut kurva normal standar), distribusi normal standar digambarkan :



Kurva distribusi normal standar

Dari bentuk kurva distribusi normal standar tersebut, dapat diketahui sifatpsifat distribusi terebut, yaitu :

1. kurva simetris terhadap sumbu Y.
2. mempunyai titik tertinggi (0, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$), dengan $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ = 0,4
3. cekung kebawah untuk interval X = -1 sampai X = +1 dan cekung ke atas untuk nilai X di luar interval tersebut.
4. meluas atau melebar tanpa batas ke kiri dan ke kanan serta mendekati sumbu X secara cepat begitu bergerak dari X = 0 ke kiri maupun ke kanan.
5. luas seluruh daerah di bawah kurva dan di atas sumbu X sebesar 1 unit.

Untuk mengubah distribusi normal umum menjadi distribusi normal standar, gunakan nilai Z. Bentuk rumusnya adalah :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Dimana :

Z = variabel normal standar

X = nilai variabel random

μ = rata-rata variabel random

σ = simpangan baku variabel random

Nilai Z adalah angka atau indeks yang menyatakan penyimpangan suatu nilai variabel random (X) dari rata-rata (μ) dihitung dalam satuan simpangan baku (σ).

Contoh Soal:

Harga saham di BEJ mempunyai nilai tengah (X)=490,7 dan standar deviasinya 144,7. Berapa nilai Z untuk harga saham 600?

Jawab:

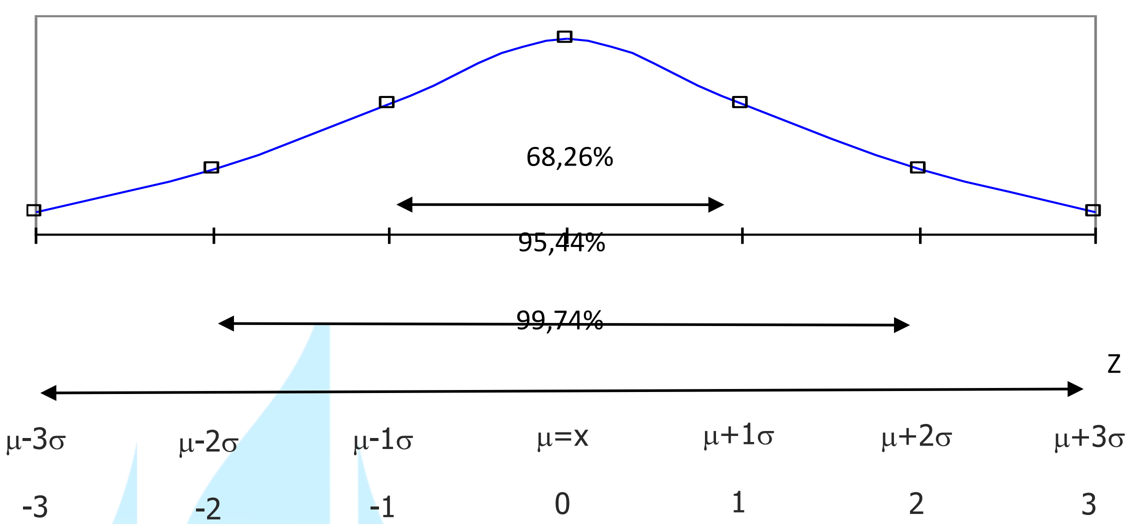
Diketahui: Nilai μ = 490,7 dan σ = 144,7

Maka nilai Z =(X - μ) / σ

Z = (600 – 490,7)/144,7

Z = 0,76

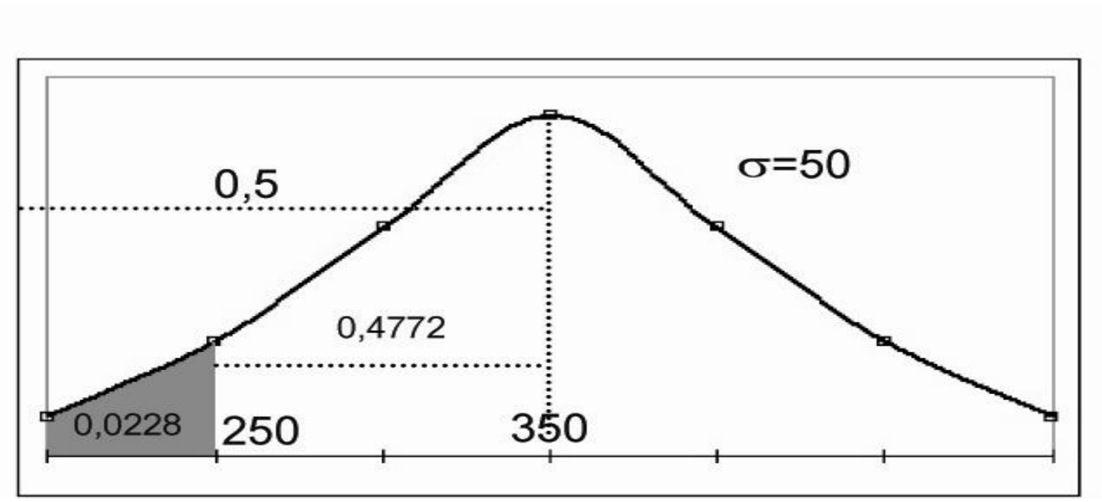
LUAS DI BAWAH KURVA NORMAL:



1. Luas antara nilai Z (-1<Z<1) sebesar 68,26% dari jumlah data.
2. Berapa luas antara Z antara 0 dan sampai Z = 0,76 atau biasa dituis P(0<Z<0,76)?
3. Dapat dicari dari tabel luas di bawah kurva normal. Nilainya dihasilkan = 0,2764

Contoh Soal:

PT GS mengklaim berat buah mangga "B" adalah 350 gram dengan standar deviasi 50 gram. Bila berat mangga mengikuti distribusi normal, berapa probabilitas bahwa berat buah mangga mencapai kurang dari 250 gram, sehingga akan diprotes oleh konsumen.



Jawab:

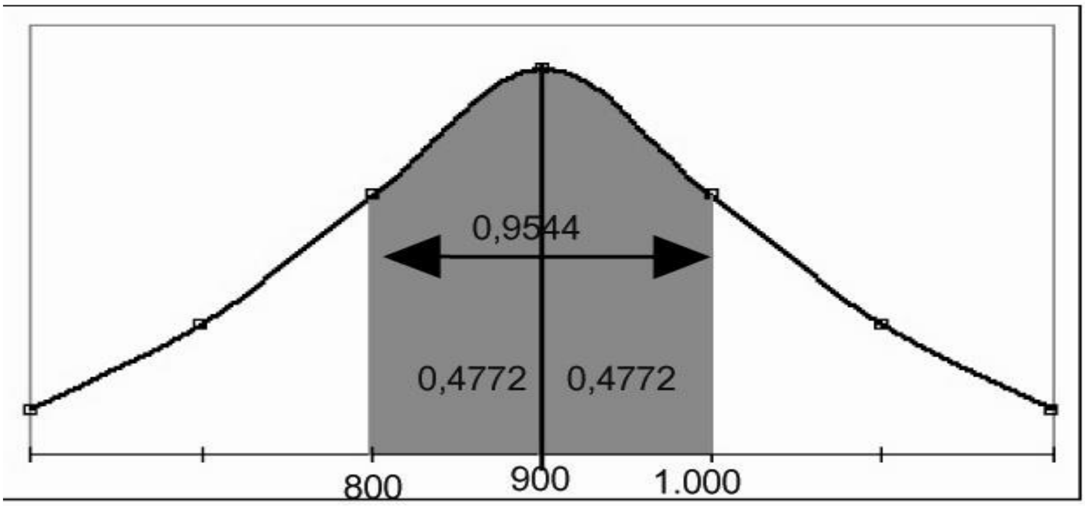
- Transformasi ke nilai z
  AP(x< 250); P(x=250) = (250-350)/50=-2,00 Jadi P(x<250)=P(z<-2,00)

- Lihat pada tabel luas di bawah kurva normal
  P(z<-2,00)=0,4772

- Luas sebelah kiri nilai tengah adalah 0,5. Oleh sebab itu, nilai daerah yang diarsir menjadi 0,5 – 0,4772=0,0228. Jadi probabilitas di bawah 250 gram adalah 0,0228 (2,28%). Dengan kata lain probabilitas konsumen protes karena berat buah mangga kurang dari 250 gram adalah 2,28%.

Contoh Soal:

PT Work Electric, memproduksi Bohlam Lampu yang dapat hidup 900 jam dengan standar deviasi 50 jam. PT Work Electric ingin mengetahui berapa persen produksi pada kisaran antara 800-1.000 jam, sebagai bahan promosi bohlam lampu. Hitung berapa probabilitasnya!



Jawab:

P(800<X<1.000)?

- Hitung nilai Z
  Z1 = (800-900)/50 = -2,00;

  Z2 = (1.000-900)/50 = 2,00

- Jadi: P(800<X<1.000) =P(-2,00<Z<2,00);
  P(-2,00<Z) = 0,4772 dan P(Z>2,00) = 0,4772

Sehingga luas daerah yang diarsir adalah = 0,4772+0,4772= 0,9544. Jadi P(800<X<1.000) = P(-2,00 < Z<2,00) = 0,9544.

Jadi 95,44% produksi berada pada kisaran 800-1.000 jam. Jadi jika PT Work Electric mengklaim bahwa lampu bohlamnya menyala 800-1.000 jam, mempunyai probabilitas benar 95,44%, sedang sisanya 4,56% harus dipersiapkan untuk garansi.