Exercice 2: étude de mouvement d'un pendule pesant

Un pendule pesant, de centre d'inertie G et de masse m, constitué d'une tige et d'un corps solide (S). Ce pendule peut effectuer un mouvement de rotation autour d'un axe horizontal (D) fixe passant par l'extrémité O de la tige (figure 1).

On désigne par J_Δ le moment d'inertie du pendule pesant par rapport à l'axe (Δ) et par L la distance séparant G de l'axe (Δ)

Données :

- $g \simeq 10\ m.s^{-2}$; $m = 400\ g$; $L = 50\ cm$
- Pour les oscillations de faible amplitude on prendra : $\sin(\theta) \approx \theta$ et $1 - \cos(\theta) \approx \frac{\theta^2}{2}$ avec θ en radian.
- $\pi^2 \approx 10$

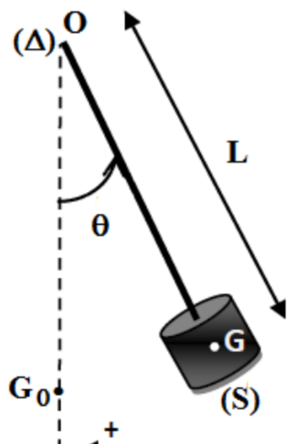

Figure 1

On écarte le pendule de sa position d'équilibre stable, dans le sens positif, d'un angle θ_m très petit, puis on le lâche sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$.

A chaque instant, la position du pendule est repérée par son abscisse angulaire θ. On néglige les frottements et on travaille dans l'approximation de faibles oscillations

I- Etude dynamique :

1- Trouver en appliquant la relation fondamentale de la dynamique, l'équation différentielle du mouvement du pendule pesant.

2- Trouver l'expression de la période propre T_0 de ce pendule en fonction de m , g , L et J_Δ pour que la solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme $\theta(t)=\theta_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$.

3- Vérifier par une analyse dimensionnelle que l'expression de T_0 a la dimension du temps.

4- Sachant que la valeur de la période propre est $T_0 \approx 0,7s$. Calculer J_Δ .

II- Etude énergétique

On choisit le plan horizontal passant par le point G_0, position de G à l'équilibre stable, comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp}(\theta = 0) = 0$.

La figure 2 représente le diagramme d'énergie du pendule étudié.

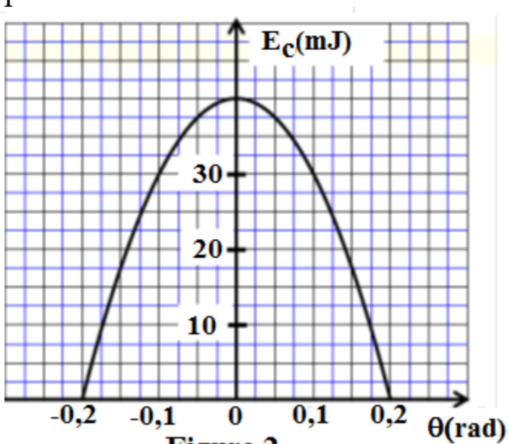

Figure 2

1- Déterminer la valeur de :

1-1- L'abscisse angulaire maximale θ_m.

1-2- L'énergie mécanique E_m du pendule.

2- Calculer les deux abscisses angulaires θ_1 et θ_2 pour lesquelles l'énergie potentielle est égale l'énergie cinétique.