Blanc 2 2023 SM

Ex 1

Soit : $f_n(x) = x - n\ln x$; $x > 0$; $n \in \mathbb{N}^*$

0,50 **1 a** Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)$

0,50 **b** Étudier les variations de la fonction f_n .

0,25 **c** En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions u_n *et* v_n tels que $0 < u_n < n < v_n$; *avec* $n \geq 3$.

0,50 **2 a** Montrer que : $(\forall n \geq 3)$: $1 < u_n < e$.

0,25 **b** Montrer que : $(\forall n \geq 3)$: $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$.

0,50 **c** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

0,25 **d** En encadrant $\ln(u_n)$, Déterminer $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

0,50 **e** Montrer que : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1}\right) = 1$; $\lim\limits_{n\infty}\left(n(u_n - 1)\right) = 1$

0,25 **3 a** Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n\infty}(v_n)$

0,50 **b** Calculer $f_n(n\ln n)$ puis en déduire que : $\forall n \geq 3$; $n\ln(n) < v_n$

0,25 **4 a** Montrer que : $(\forall x > 0)$: $x > 2\ln x$

0,25 **b** En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $n > 2\ln n$

0,25 **5 a** Déterminer le signe de $f_n\left(2n\ln(n)\right)$.

0,50 **b** Montrer que : $(\forall n \geq 3)$; $n\ln n < v_n < 2n\ln n$.

0,25 **c** Montrer que : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{v_n}{n\ln n}\right) = 1$

Ex 2 :

I Soit la fonction : $h(x) = x - \ln x$; $\forall x \geq 0$

0,25 **1** Montrer que : $(\forall x > 0)$; $h(x) \geq 1$.

2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par ce qui suit :

$$\begin{cases} f(x) = \left(\dfrac{1}{x - \ln x}\right) & ; \quad x > 0 \\ f(0) = 0 & \end{cases}$$

0,25 **a** Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

0,25 **b** La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

II Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par une intégrale :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$$

0,25 **1 a** Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

0,50 **b** Montrer que $F'_d(0) = 0$ et encore que :

$$(\forall\, x > 0) \quad ; \quad F'(x) = \frac{\ln 2 - \ln x}{h(2x) \cdot h(x)}$$

0,25 **2 a** Vérifier que : $\ln 2 = \displaystyle\int_x^{2x} \left(\frac{1}{t}\right) dt$

0,25 **b** Montrer que : $\forall\, x \geq 1 \quad ; \quad 0 \leq F(x) - \ln 2 \leq \left(\dfrac{\ln(2x)}{x - \ln x}\right)$

0,25 **c** En déduire la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x)$

0,25 **3 a** Montrer l'inégalité suivante : $F\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq \ln 2$

0,50 **b** Montrer que : $\exists\, \alpha \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right] \quad ; \quad F(\alpha) = \ln 2$

0,25 **4 a** Dresser le tableau de variations de la fonction F.

0,25 **b** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_F)$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

5 On considère la fonction G définie sur $[1, +\infty[$ par ce qui suit :

$$G(x) = \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t - \ln t}\right) dt$$

0,50 **a** Montrer que : $\forall\, x \geq 1 \quad ; \quad G(x) \geq \dfrac{1}{2}\ln^2(x)$

0,25 **b** En déduire la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} G(x)$

0,50 **III** On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \left(\frac{t}{t - \ln t}\right) dt$$

0,50 **1 a** Montrer que : $\forall\, t > 0 \quad ; \quad \left(\dfrac{t}{t - \ln t}\right) \leq t$

0,50 **b** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

0,25 **c** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente

0,50 **d** Montrer que : $0 \leq \displaystyle\lim_{n\infty}(u_n) \leq \frac{1}{2}$

2 On considère la suite numérique $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$v_n = \int_1^n \left(\frac{t}{t - \ln t}\right) dt$$

0,50 **a** Calculer $\displaystyle\int_1^n \left(1 + \frac{\ln t}{t}\right) dt$ puis montrer que : $\forall\, n \geq 5 \quad ; \quad v_n \geq n$

0,50 **b** En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$.

Ex3 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit (E) : $z^3 + (4\cos\theta - 2)z^2 + (4 - 8\cos\theta)z - 8 = 0$; $z \in \mathbb{C}$; $\theta \in]0, \pi[$

0,50 **1** **a** Résoudre l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution réelle indépendante de θ.

0,50 **b** Écrire les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

2 Soient les points : $A(2)$; $B(-2\,e^{-i\theta})$; $C(-2\,e^{i\theta})$.

0,50 **a** Déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.

0,50 **b** Déterminer la valeur de θ pour laquelle ABC soit un triangle équilatéral direct.

0,50 **c** Déterminer z_E et z_F affixes des points E et F respectivement, milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$.

0,50 **d** Montrer que : $\left(\frac{z_E}{z_F} \times \frac{z_F - z_A}{z_E - z_A}\right) \in \mathbb{R}$

0,50 **e** Puis en déduire que les points A ; O ; E ; F sont cocycliques.

Ex4 :

I On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x , $y \in \mathbb{Z}$.

0,50 **1** Vérifier que le couple $(13,3)$ est une solution de l'équation (E).

0,50 **2** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

II Soient (x, a, c, g) des entiers naturels tels que : $25g - 108c = 1$

0,50 **1** Démontrer que si $x \equiv a\,[7]$ et $x \equiv a[19]$, alors $x \equiv a[133]$

0,50 **2** **a** Vérifier que : $\forall x \in [\![1;6]\!]$; $x^6 \equiv 1[7]$. Avec ($[\![1;6]\!] = [1;6] \cap \mathbb{N}$)

0,50 **b** On suppose que a n'est pas un multiple de 7.
Démontrer que : $a^{108} \equiv 1\,[7]$.

0,50 **c** En déduire que : $(a^{25})^g \equiv a\,[7]$.

0,50 **d** On suppose que a est un multiple de 7.
Démontrer que : $(a^{25})^g \equiv a\,[133]$.

0,50 **e** On admet que pour tout entier naturel a : $(a^{25})^g \equiv a\,[19]$
Démontrer que : $(a^{25})^g \equiv a\,[133]$.

Ex5 :

Rappel : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Soit $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix} \quad ; \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Soit $E^* = E \backslash \{\theta\}$, Et On considère l'application définie ainsi :

$$\begin{aligned} \varphi \quad : \quad (E^*,\times) & \longmapsto (\mathbb{C}^*,\times) \\ M(a,b) & \longmapsto (a-b) + ib\sqrt{2} \end{aligned}$$

0,50 **1** Montrer que $(E,+)$ est un groupe commutatif.

0,75 **2** **a** Montrer que pour tout quadruplet $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, On ait :

$$M(a,b) \times M(c,d) = M\left(ac - 3bd \quad ; \quad ad + bc - 2bd\right)$$

0,75 **b** En déduire que $(E,+,\times)$ est un anneau.

0,50 **3** **a** Montrer que E^* est une partie stable de $(E,\times)$.

0,75 **b** Montrer que φ est un isomorphisme de $(E^*,\times)$ vers $(\mathbb{C}^*,\times)$.

0,75 **4** Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps.