EX1

En utilisant la définition de la dérivabilité d'une fonction en un point, calculer le nombre dérivé de la fonction f au point a :

1) $f(x)=x^2+3x-1$ et $a=1$.

2) $f(x)=x^3+x^2$ et $a=1$.

3) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ et $a=0$.

4) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ et $a=\sqrt{3}$.

5) $f(x)=\sqrt{2x-1}$ et $a=4$.

6) $f(x)=\sin(2x)$ et $a=\dfrac{\pi}{6}$.

7) $f(x)=\cos x$ et $a=\pi$.

8) $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ et $a=-3$.

9) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} ; x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases}$ et $a=0$.

10) $\begin{cases}f(x)=\dfrac{x^3+x^2-2}{x^2-1} ; x\neq 1\\ f(1)=\dfrac{5}{2}\end{cases}$ et $a=1$.

EX2 :

I

Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f :

1) $f(x)=x^2-3x+2$; 2) $f(x)=x^3-2x$

3) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}$; 4) $f(x)=x^2(x-1)^3$

5) $f(x)=1-x^3-x^5$; 6) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

7) $f(x)=(x^2-4x)^2$; 8) $f(x)=3x^4+4x^3+1$

II

1) $f(x)=\dfrac{-3}{x^2+x+1}$; 2) $f(x)=x-\cos x$

3) $f(x)=2x+\sin x$; 4) $f(x)=\sqrt{x^2+3x+5}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{1+\cos^2 x}$; 6) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^4+2}$

EX3

En utilisant la notion du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5+3x^4-7x^3+x^2+x+1}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x\sin x}{x-\pi}$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos^3 x}{x-\pi}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(x+1)^3\cos x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}\cos(\pi x)+1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{3x-\pi}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x+\sin x)^3-1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)+\cos x-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(2x).\cos x}{x-\pi}$

EX4

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{4}{x+1}$$

1) a) Déterminer D ensemble de définition de f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de D.

2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D$.

b) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au point d'abscisse -3.

3) a) Montrer que pour tout $x\in D$:

$$f''(x)=\frac{(x-1)(x^2+4x+7)}{(x+1)^3}$$

b) En déduire la monotonie de la fonction f'.

c) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout $x\in D$.

4) Donner le tableau de variations de la fonction f.

EX5

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases}g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2-x}} ; x\leq 0\\ g(x)=x-1+\dfrac{1}{x+1} ; x>0\end{cases}$$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f au point 0 puis interpréter le résultat géométriquement.

3) Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.

4) Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$ puis donner le tableau de variations de la fonction g.

Ex6 :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

1) Déterminer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.

2) Montrer en utilisant un raisonnement par récurrence que :

$$(\forall n\in\mathbb{N})(\forall x\in\mathbb{R})\ f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}$$

où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n.