Blanc lydex 2025 - sc math

الصفحة	الامتحان الوطني التجريبي الاول للبكالوريا	LYCÉE MOHAMMED VI D'EXCELLENCE
1/5	ابريل 2025	APEE Association pour la Promotion de l'Enseignement d'Excellence
*****	- الموضوع -	*Benguerir*
SM	EXAMEN BLANC N°1	

4h	مدة الإنجاز	الرياضيات		المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية "أ" و"ب" - خيار فرنسية -		الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GÉNÉRALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux et répartis sur 4 pages et suivant les domaines comme ci-dessous :

Exercice 1	Structures algébriques	Page 2	3,75 points
Exercice 2	Arithmétique	page 3	3 points
Exercice 3	Fonctions numériques suites et intégrales	page 3 et 4	10 points
Exercice 4	Nombres complexes	Page 4 et 5	3,25 points

- $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes
- On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
- $|z|$ désigne le module du nombre complexe z
- $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien

xercice : 1 (**3,75 Points**)

Les parties **I et II sont indépendantes**

Partie I :

Dans l'espace vectoriel réel des matrices carrés d'ordre **2** noté $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $E = \left\{ M \in M_2(\mathbb{R}) / M \times A = A \times M \right\}$

0,5 **1)** Montrer que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel réel

2) Soit $M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ tels que $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ une matrice de $M_2(\mathbb{R})$

,25 **a)** Calculer $M \times A$ et $A \times M$

,25 **b)** Montrer que $M \times A = A \times M \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ 2(x - t) = 5y \end{cases}$

0,5 **c)** En déduire que $M \times A = A \times M \Leftrightarrow M = \left(x - \frac{3y}{2}\right) I + \frac{y}{2} A$

,25 **3)** Montrer que (I, A) est une base de E

Partie II :

Pour tout a et b de $I =]1, +\infty[$ on pose $a * b = \sqrt{(a^2 - 1)(b^2 - 1) + 1}$

,75 **1)** Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I commutative et associative

,25 **2)** Montrer que $*$ admet un élément neutre dans I que l'on déterminera

0,5 **3)** Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif

0,5 **4)** On pose $H = \left\{ \sqrt{1 + e^x} / x \in \mathbb{R} \right\}$

Montrer que H est un sous-groupe de $(I, *)$

ercice : 2 (3 Points)

On rappelle que **1013** et un nombre premier

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $2x^{1013}+x-1\equiv 0[2026]$

1) Soient n, m, a et b des entiers naturels ($n\geq 2$ et $m\geq 2$) :

75 En utilisant le théorème de Bezout montrer que si $\begin{cases} m\wedge n=1 \\ a\equiv b[n] \\ a\equiv b[m] \end{cases}$ alors $a\equiv b[mn]$

2) Soit x une solution x de (E)

25 **a)** Montrer que $x\wedge 2016=1$

75 **b)** Montrer que $(\forall x\in\mathbb{Z})\quad x^{1013}\equiv x[2026]$

,5 **c)** Montrer que $3x\equiv 1[2026]$

75 **3)** Montrer que x est solution de (E) si et seulement si $3x\equiv 1[2026]$

ercice : 3 (10 Points)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie sur $\left[0,\frac{1}{e}\right[\cup\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x)=\dfrac{x}{(1+\ln x)^n} \text{ si } x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$$

Et (C_n) sa courbe dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ tels que $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

Partie I

,5 **1)** Montrer que la fonction f_n est dérivable à droite au point $x_0=0$ et interpreter géométriquement ce

,5 **2)** **a)** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{(\ln x)^n}=+\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$

75 **b)** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{e}\\ x>\frac{1}{e}}}f_n(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{e}\\ x<\frac{1}{e}}}f_n(x)$ (Discuter suivant la parité de n)

,5 **c)** Étudier les branches infinies de (C_n)

75 **3)** **a)** Montrer que f_n est dérivable sur $\left]0,\frac{1}{e}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$ et que :

$$\left(\forall x\in\left]0,\frac{1}{e}\right[\cup\left]\frac{1}{e},+\infty\right[\right):f_n'(x)=\frac{1-n+\ln x}{(1+\ln x)^{n+1}}$$

,5 **b)** Étudier suivant la parité de n le signe de $(1+\ln x)$ sur $]0,+\infty[$

1 **c)** Dresser le tableau de variation de f_n (Discuter suivant la parité de n)

4) Tracer la courbe (C_1) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Partie II

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $u_n = f_n\left(e^{n-1}\right)$

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in [1,+\infty[)$: $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

2) Déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante

3) Déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Partie III

On considère la fonction F définie sur $\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$ par : $F(x) = \int_1^x f_2(t)dt = \int_1^x \frac{t}{(1+\ln t)}$

1) a) En utilisant une intégration par changement de variable montrer que :

$\left(\forall x \in \left]\frac{1}{e},+\infty\right[\right)$: $F(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^{2u}}{(1+u)^2}du$ puis déterminer le signe de F sur $]0,+\infty$

b) Montrer que $\left(\forall x \in \left]\frac{1}{e},1\right]\right)$: $F(x) \leq \frac{x^2\ln(x)}{1+\ln(x)}$ puis calculer $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+} F(x)$

2) a) Par une intégration par partie montrer que :

$(\forall x \in]1,+\infty[)$: $F(x) = \frac{x^2}{2(1+\ln x)^2} - \frac{1}{2} + \int_1^x \frac{t}{(1+\ln t)^3}dt$

b) En déduire que $(\forall x \in]1,+\infty[)$: $F(x) \geq \frac{x^2}{2(1+\ln x)^2} - \frac{1}{2}$

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

3) a) Montrer que F est dérivable sur $\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$ et que $\left(\forall x \in \left]\frac{1}{e},+\infty\right[\right)$: $F'(x) = \frac{x}{(1+\ln x)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de F

...e : 4 (3 Points)

Les parties **I et II sont indépendantes**

Partie I :

Soit m un nombre complexe $(m \in \mathbb{C})$.

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E_m) : \quad (1-i)z^2 + 2i(1-m)z - (1+i)(m^2+1) = 0$$

1) a) Vérifier que $z_1 = 1 + im$ est une solution de (E_m) puis déduire z_2 l'autre solution de l'équation

b) Montrer que $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$

2) On suppose que $m = \sqrt{3} + \left(1 + i\sqrt{3}\right)\tan(\theta)$ avec $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

5 b) Montrer que $z_1 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{\cos(\theta)}\right)e^{i\theta}$ en déduire l'écriture exponentielle de z_1

5 c) Déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

Partie II

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = -1$

Et à tout point M d'affixe z avec $z \neq 0$ et $z \neq 1$ et $z \neq -1$ on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1}{z}$

5 1) Vérifier que $(\forall z \in \mathbb{C}^*)$: $\left(\frac{z + z'}{2} - 1\right)\left(\frac{z + z'}{2} + 1\right) = \left(\frac{z - z'}{2}\right)^2$

5 2) On pose I le milieu du segment $[MM']$, montrer que $IA \times IB = IM^2$

5 3) Montrer que la droite (MM') est une bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right)$

- FIN -