Ajitfham Academy

2BSM

Mouvement d’un projectile dans un champ de pesanteur uniforme

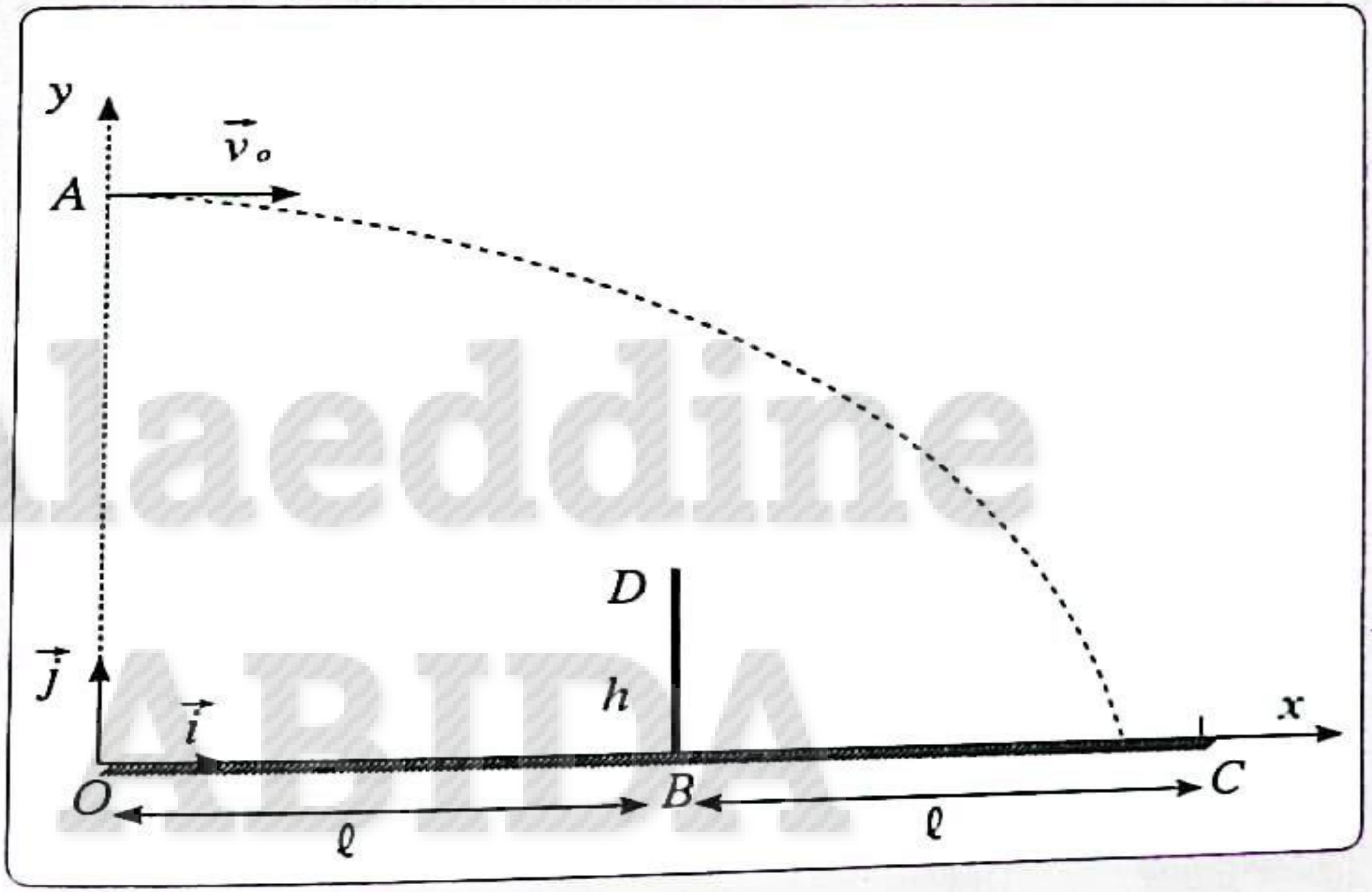
Alaeddine ABIDA

Exercice 1

2 Un joueur de tennis effectue un service en lançant la balle à partir d'un point A situé à la hauteur $H = 2m$ du sol, avec une vitesse initiale $\vec{v}_o$ horizontale (figure).

On étudie le mouvement de la balle dans le plan $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- On néglige les frottements et on donne : $g = 10m.s^{-2}$
- Longueur du terrain : $OC = 2\ell$
  $OB = BC = \ell = 12m$
- Hauteur du filet : $h = 1m$

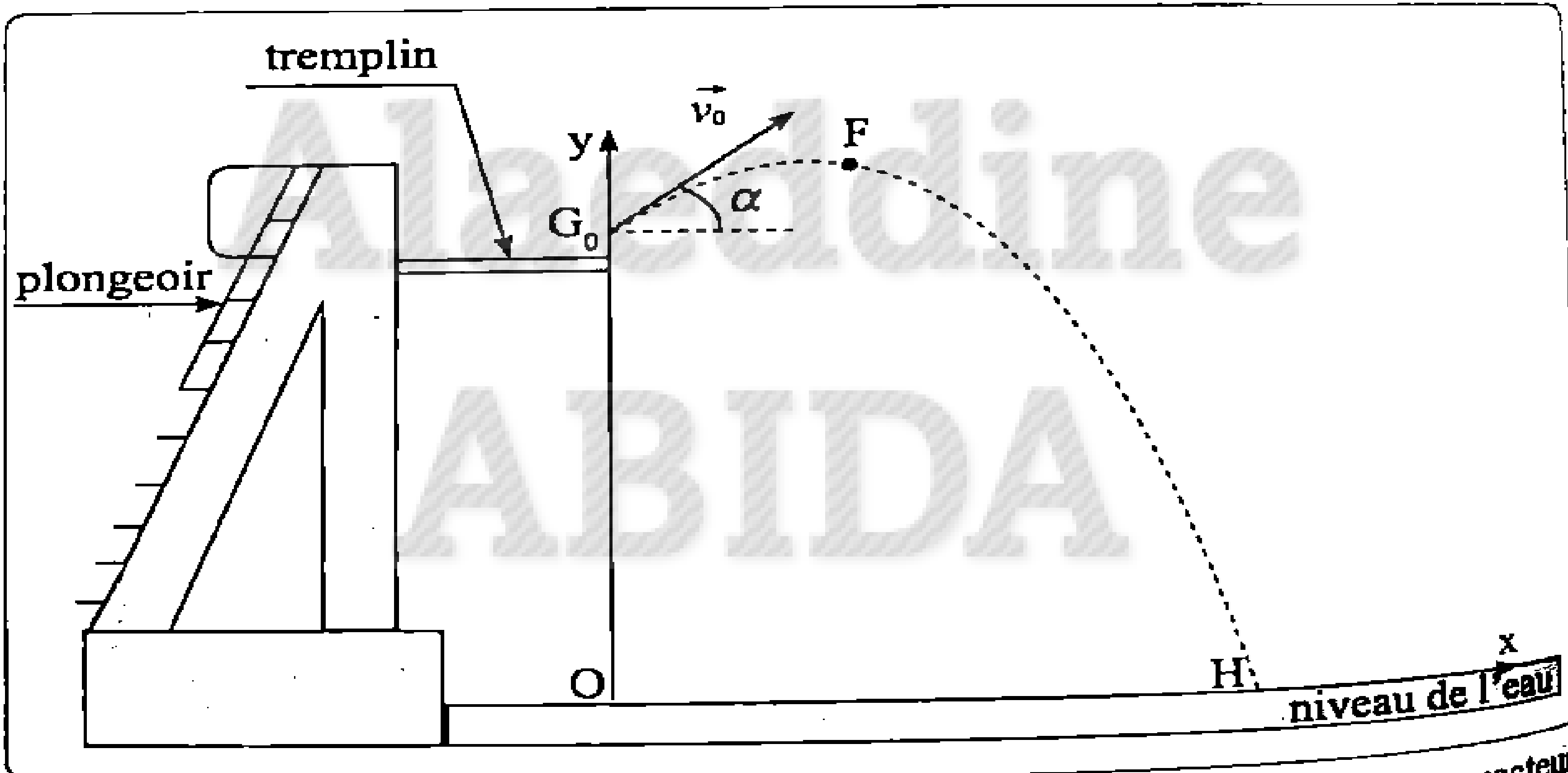


1- Montrer que l'équation de la trajectoire de la balle est $y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + H$

2- Trouver les deux valeurs limites $v_o(\max)$ et $v_0(\min)$ qui encadrent les valeurs de v_o pour que le service soit correct.

Exercice 2

3 On se propose d'étudier le mouvement du centre d'inertie d'un plongeur au cours d'un saut modélisé type «saut de l'ange». On négligera dans tout l'exercice le mouvement de rotation du plongeur autour de son centre d'inertie ainsi que les frottements avec l'air. Le repère d'étude xOy est défini à partir du schéma ci-dessous.



Après s'être lancé, le plongeur quitte le tremplin à l'instant $t = 0$ avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0$ incliné de $\alpha = 40°$ par rapport à l'horizontale.
Son centre d'inertie G est alors au point de G_0 coordonnées $x_0 = 0$ et $y_0 = 6{,}0\,m$.

On démontre que le mouvement de G est donné par
$\overrightarrow{OG} = (v_0.\cos\alpha).t.\vec{i} + \left(-\frac{1}{2}g.t^2 + (v_0.\sin\alpha).t + y_0\right).\vec{j}$.

1- Le sommet de la trajectoire étant atteint au point F d'abscisse $x_F = 1,0\,m$, en déduire la vitesse initiale v_0 .

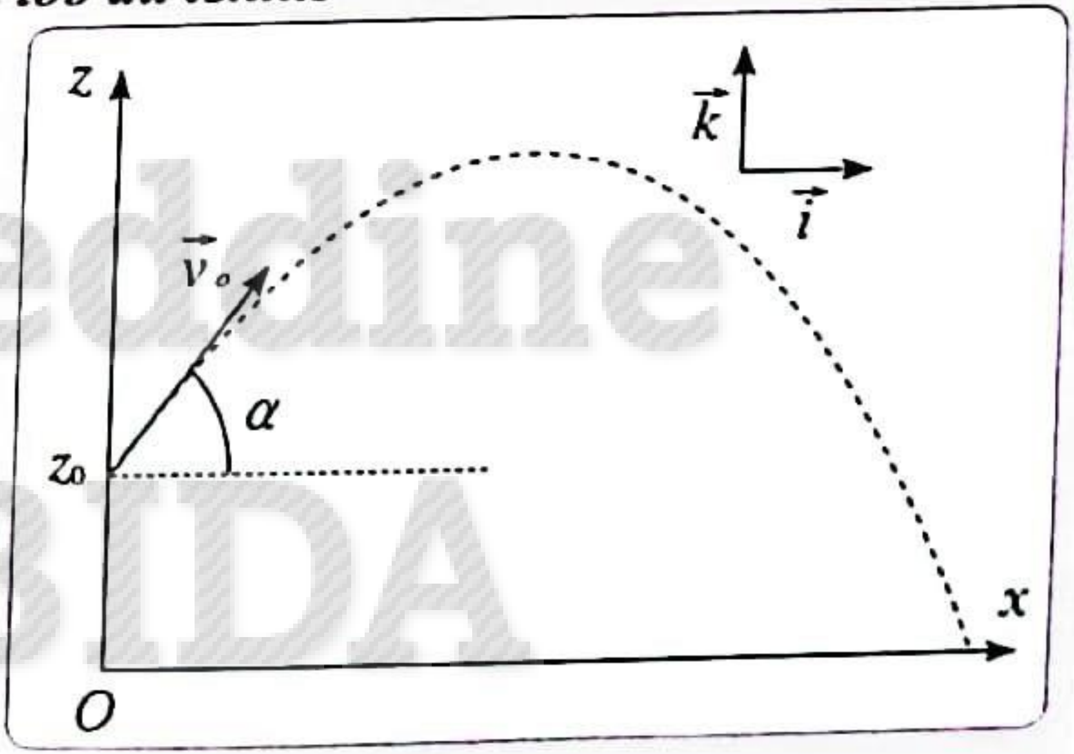
2- Le plongeur pénètre dans l'eau en H . Quelle est sa vitesse en H ?

Donnée : $g = 9,8 m.s^{-2}$

Exercice 3

4

Le lob au tennis



Au tennis, un lob est réussi lorsque la balle passe au-dessus de l'adversaire et retombe avant la ligne de fond de court.
Le joueur 1, situé à $d_1 = 2,0\ m$ du filet, tape la balle à une hauteur $z_0 = 0,30\ m$ et lui communique une vitesse $\vec{v}_0$ contenue dans un plan vertical, de valeur $v_0 = 36\ km.h^{-1}$ et en formant un angle $\alpha = 60°$ avec l'horizontale.
On négligera les forces de frottement.
Données : $g = 9,8 m.s^{-2}$. La hauteur du filet h vaut $1,0m$. La ligne de fond du court est située à $12,0\ m$ du filet.

1- Déterminer les équations horaires du centre d'inertie G de la balle dans le repère

$(O;\vec{i};\vec{k})$ représenté sur la figure (la balle est frappée à la date $t = 0$).

2- En déduire l'équation de la trajectoire de la balle.

3- La balle passe-t-elle au-dessus du filet?

4- Le joueur 2 est de l'autre côté du filet. Il tend sa raquette verticalement pour essayer de toucher la balle: le tamis de sa raquette est alors situé à une hauteur $h = 2,30\ m$. A quelle distance minimale du filet le joueur 2 doit-il se placer pour intercepter la balle?

5- Le joueur 2 se trouve à une distance $d_2 = 4,0\ m$ du filet. Peut-il intercepter la balle? le lob est-il réussi?

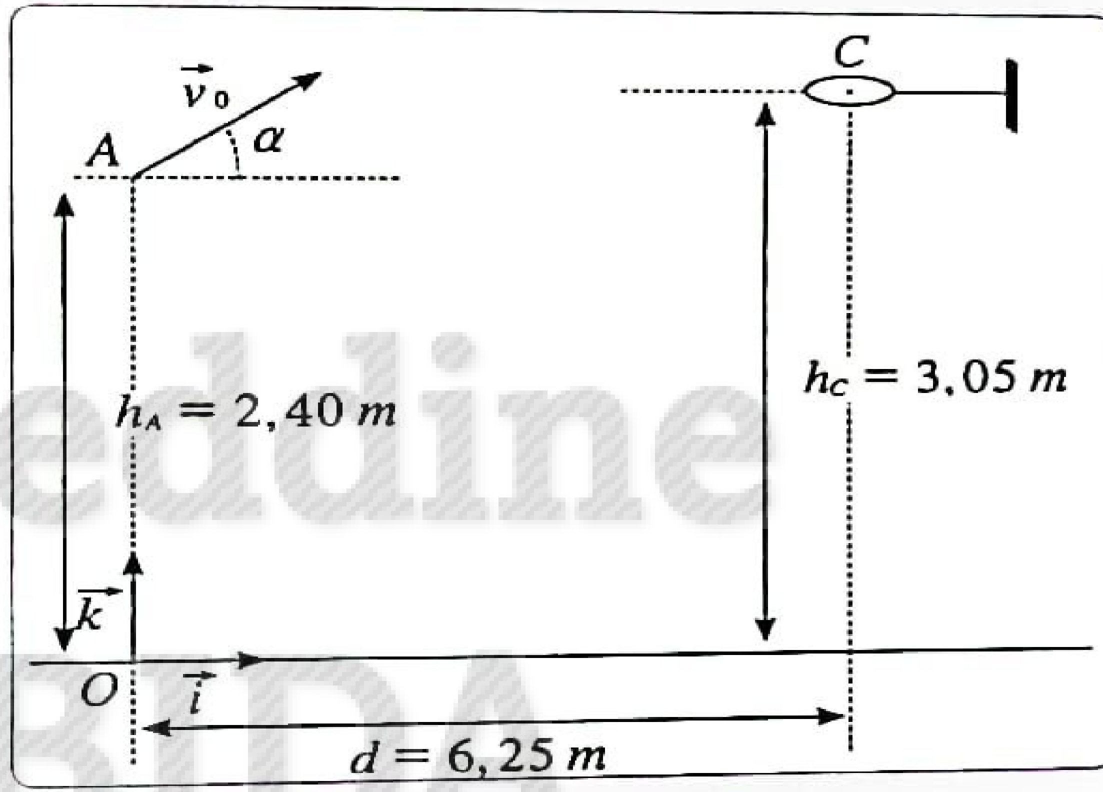
6- Caractériser le vecteur vitesse $\vec{v}$ de la balle lors de son impact sur le sol.

Exercice 4

5

On étudie la trajectoire du centre d'inertie G d'un ballon de basket lancé vers le cercle du panier adverse par un joueur attaquant. On ne tiendra compte ni de la résistance de l'air ni de la rotation éventuelle du ballon.

Le lancer est effectué vers le haut ; on lâche le ballon lorsque son centre d'inertie et en A (fig, la figure n'est pas à l'echelle). Sa vitesse initiale est représentée par le vecteur $\vec{v}_0$ situé dans un plan vertical $(O;\vec{i};\vec{j})$ et faisant un angle aigu avec l'axe horizontal de mesure $\alpha = 40,0°$.



On utilisera les valeurs numériques des différentes grandeurs fournies sur la figure.

On étudie le mouvement de G par rapport au repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

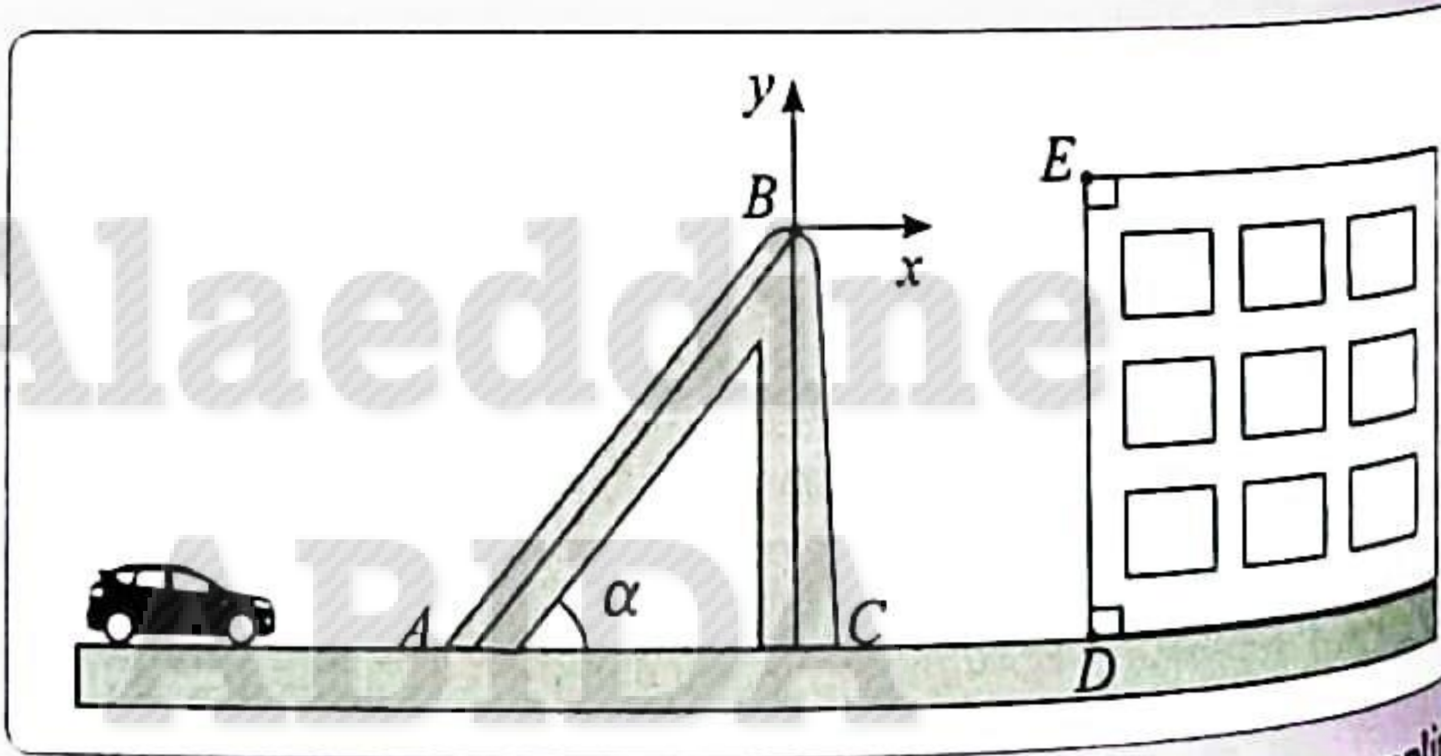
1- Etablir les équations paramétriques (équations horaires) du mouvement du centre d'inertie G du ballon. Montrer que la trajectoire de G est située dans un plan vertical et donner sa nature.

2- En déduire la valeur v_0 de la vitesse initiale du ballon pour que G passe exactement au centre G du cercle «panier». On donne $g=9,81\ m.s^{-2}$.

Exercice 5

6

Un réalisateur de cinéma souhaite faire réaliser à un cascadeur professionnel un saut pour un film.



Ce cascadeur doit sauter avec sa voiture sur la piste horizontale du toit en terrasse d'un immeuble. Pour cela, il utilise un tremplin ABC formant un angle α avec le sol horizontal et placé à la distance $CD = 15m$ de l'immeuble.

On étudiera le mouvement du centre d'inertie G de l'ensemble (automobile-pilote) dans le référentiel terrestre.

On admettra qu'à l'instant initial, le centre d'inertie G de la voiture quitte le point B (origine du repère) avec la vitesse $\vec{V}_B$ et qu'il est confondu avec le point E à l'arrivée sur le toit.

Données : la masse du système (automobile-pilote) est $m = 1000 kg$; $BC = 8\,m$; $DE = 10\,m$; $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

1- Etablir, dans le repère $(B;\vec{i};\vec{j})$ du schéma, les équations des coordonnées de l'accélération $\vec{a}(a;a)$ de la vitesse $\vec{V}(V_x;V_y)$ et de la position $G(x;y)$ du centre d'inertie du système.

Etablir aussi, dans le même repère, l'équation cartésienne de la trajectoire $y = f(x)$ du centre d'inertie G entre B et E.

2- Le centre d'inertie de la voiture doit atterir sur le toit en E avec une vitesse horizontale.

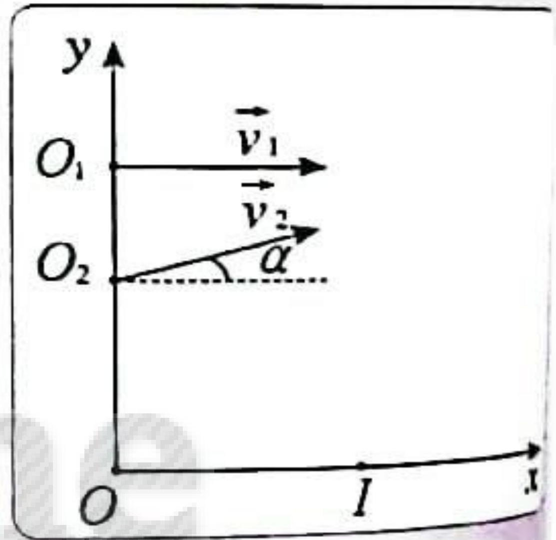
a- Que peut-on dire de V, en ce point?

b- Montrer alors que : $x_E = CD = \dfrac{V_B^2 \sin(2\alpha)}{2g}$ et $y_E = DE - BC = \dfrac{V_B^2 \sin^2\alpha}{2g}$

c- Exprimer le rapport $\dfrac{y_E}{X_E}$ en fonction de l'angle α, puis en déduire la valeur de α.

d- Calculer la valeur de la vitesse V_B au sommet du tremplin pour réussir la cascade.

Exercice 6



Deux balles B_1 et B_2 sont lancées respectivement depuis deux points O_1 et O_2 situés à la verticale de O, avec des vitesses $\vec{v}_{O1}$ et $\vec{v}_{O2}$ dans un même plan vertical et de même module $(v_{O1} = v_{O2} = v_O)$. La balle B_1 est lancée après B_2, mais les deux balles atteignent le sol au point I.

En prenant pour origines des dates $t = 0$ le départ de B_2 et en négligeant l'action de l'air, les équations horaires selon l'axe Ox sont :

Pour B_1, $x_1 = 21t - 2,1$ et pour B_2, $x_2 = 20t$

On donne : $OI = 42m$, $OO_1 = h_1 = 20m$ et $g = 10m.s^{-2}$

1- A quel instant a été lancée la bille B_1 ?

2- A quel instant t_I les deux billes atteignent-elles le point I ?

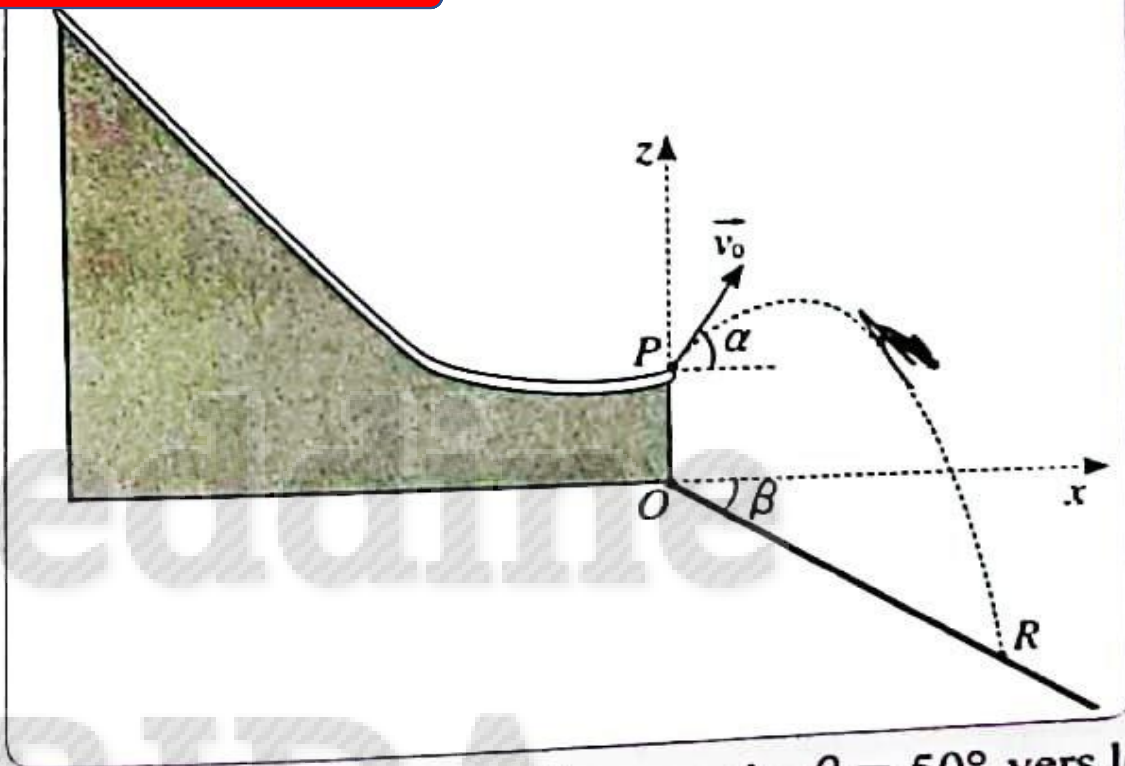
3- En utilisant la deuxième loi de Newton:

3.1- Déterminer v_0 et α.

3.2- Ecrire l'équation horaire $y_2(t)$ en déduire h la valeur de $h_2 = OO_2$.

3.3- Ecrire l'équation horaire $y_1(t)$.

Exercice 7



Un champion de saut à ski, assimilable à un corps ponctuel, s'élance sur un tremplin de saut à ski. Au moment d'aborder le saut, sa vitesse v_0 est égale à $25m.s^{-1}$. Le bas de la piste est en outre incliné vers le haut d'un angle α égal à 10°.

Le skieur quitte la piste au point P.

On associe au référentiel terrestre le repère $(O;\vec{i};\vec{k})$. Le point P se situe à $6m$ au dessus du point O. La piste de réception fait un angle $\beta = 50°$ vers le bas par rapport à l'axe horizontal Ox.

Données : $g = 9,8m.s^{-2}$

On pose $OP = h$

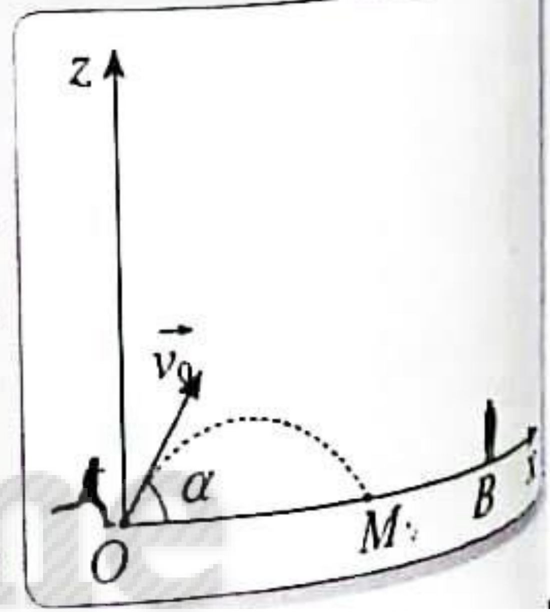
1- Etablir les équations horaires de sa trajectoire dans l'air, puis donner l'expression de l'équation cartésienne de sa trajectoire.

2- Quelle est l'équation de la droite représentant la piste de réception?

3- Le skieur se réceptionne au point R. Quelles sont les coordonnées de ce point ? Quelle est la longueur L du saut $(L = OR)$?

Exercice 8

Au cours d'un match de football, un joueur A tire le ballon vers son coéquipier, à une vitesse $\vec{v}_0$ appartenant au plan vertical (xz). $\vec{v}_0$ fait avec l'horizontal ox un angle $\alpha = 20°$ (voir figure).



Les frottements sont négligés dans la chute du ballon.

L'origine des dates $t = 0$, coïncide avec l'instant de départ du ballon du point O.

données : $g = 9,8\,m.s^{-2}$; $v_0 = 15\,m.s^{-1}$; $d = AB = 25\,m$

L'équation de la trajectoire du centre de gravité du ballon supposé ponctuel est:

$$z = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha\, x$$

1- Déterminer l'abscisse x_M du point M où le ballon touche le terrain.

2- Pour récupérer le ballon au point M, le joueur B se lance à la vitesse $\vec{V}_B$ dirigé vers M à la date $t = 0$.

Le moment est supposé rectiligne uniforme.

Déterminer la valeur de V_B.

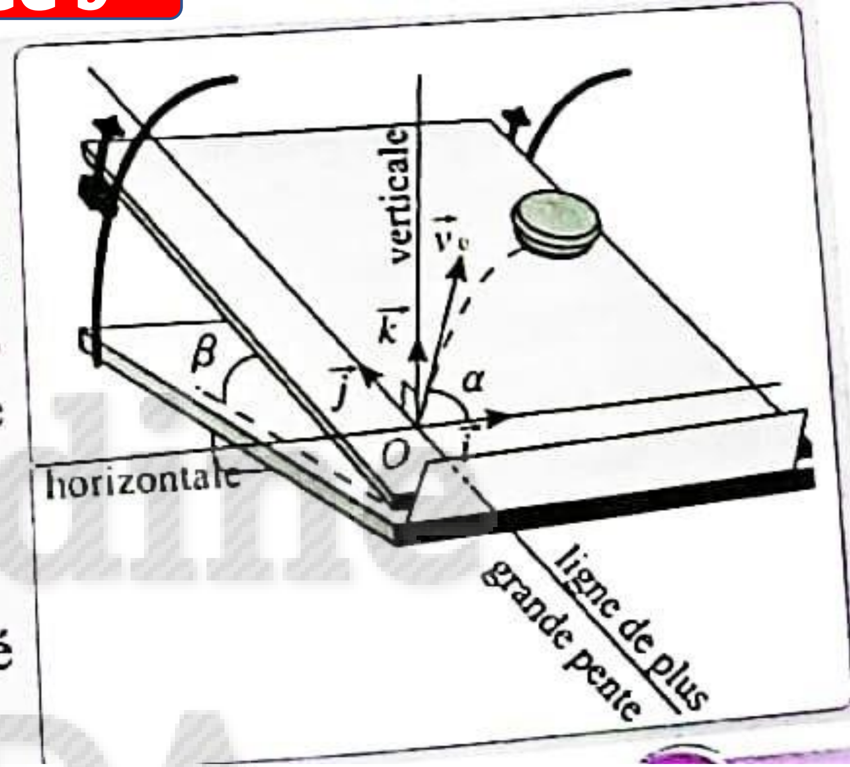
Exercice 9

10

Un mobile sur coussin d'air est lancé sur une table inclinée d'un angle β avec l'horizontale. La vitesse initiale $\vec{V}_0$, parallèle au plan incliné, n'est pas dirigée suivant une ligne de plus grande pente.

$\vec{V}_0$ fait un angle α avec l'axe $(O;\vec{i})$.

À l'origine des dates $(t=0)$, le centre de gravité du mobile se trouve en O.



Le mobile glisse sans frottement sur le plan incline $(O;\vec{i};\vec{j})$ sans le quitter.

L'accélération du champ de pesanteur est constante.

En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les coordonnées du vecteur vitesse du point G vérifient les équations différentielles suivantes: $\frac{dv_x}{dt}=0$, $\frac{dvy}{dt}=-g\sin\beta$ et $\frac{dv_z}{dt}=0$

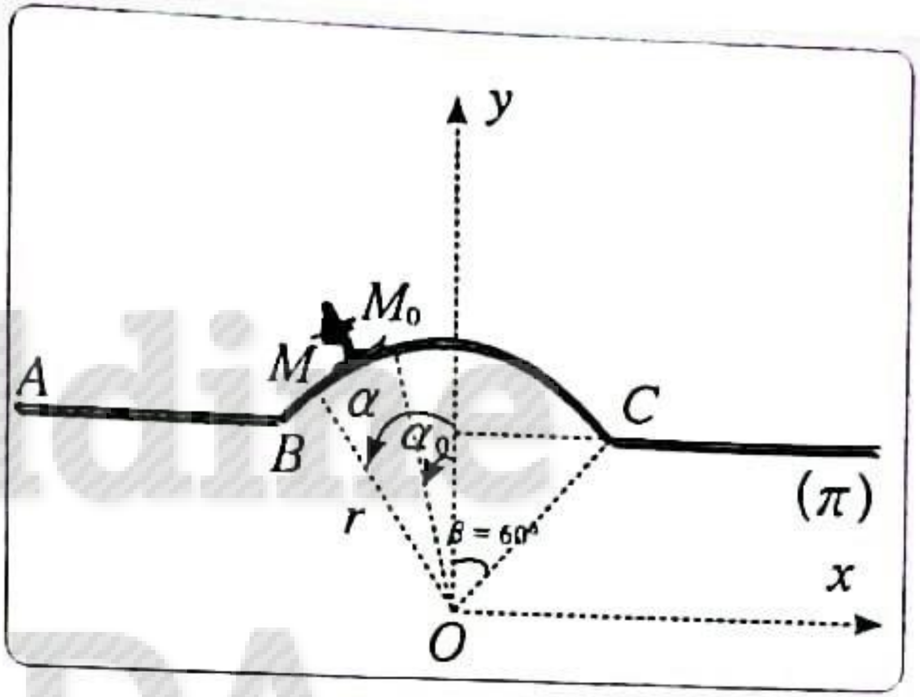
En déduire que la trajectoire de G a pour équation : $y=-\frac{1}{2}\frac{g\sin\beta}{v_0^2.\cos^2\alpha}x^2+(\tan\alpha)x$.

Exercice 10

11

La figure ci-contre montre un joueur de skateboard sur une piste circulaire de rayon r et de centre O, il quitte cette piste au point M_0 avec une vitesse $\vec{v}_o$ appartenant au plan vertical $(O;x;y)$.

La vitesse $\vec{v}_o$ est tangente à la piste circulaire $\overset{\frown}{BC}$.



Données : $g = 10 m.s^{-2}$; $v_o = 8 m.s^{-1}$, $r = 5,4 m$, $\alpha_0 = 22°$ et $\beta = 60°$

On néglige les frottements et on prend comme origine de temps $(t = 0)$, l'instant où le joueur passe par M_o.

1- En appliquant la deuxième loi de Newton, établir les équations horaires $x = f(t)$ et $y = g(t)$ du skieur qu'on assimile à un point matériel.

2. Le skieur tombe sur le plan (π) au point N.

- Déterminer l'instant t_N .
- En déduire la distance CN .

Exercice 11

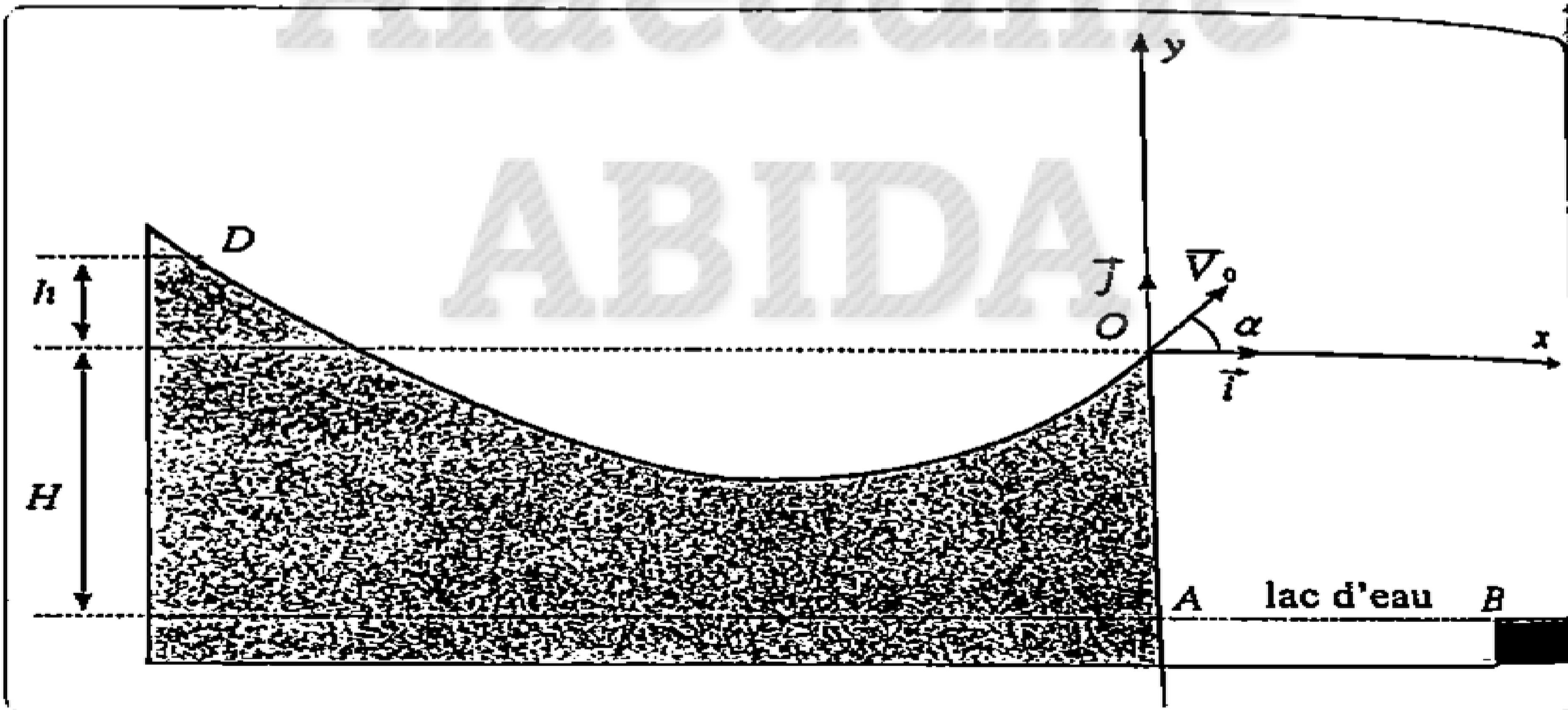
12 **Etude du mouvement d'un skieur**

Un skieur glisse sur une montagne recouverte de glace, au pied de laquelle se trouve un lac d'eau.

La figure suivante donne l'emplacement de ce lac par rapport au point O où le skieur sera obligé de quitter le sol de la montagne avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale.

Le skieur part d'un point D situé à la hauteur h par rapport au plan horizontal contenant le point O (figure -1).

La vitesse v du skieur lors de son passage au point O s'exprime par la relation $v = \sqrt{2g.h}$.



Dans un essai le skieur passe par le point O origine du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ avec une certaine vitesse il tombe alors dans l'eau du lac.

On veut déterminer la valeur minimale h_m de la hauteur h du point O à partir duquel doit partir le skieur sans vitesse initiale pour qu'il ne tombe pas dans le lac.

Données :

- Masse du skieur et ses accessoires $m = 60kg$
- Accélération de la pesanteur $g = 10m.s^{-2}$;
- La hauteur $H = 0,50m$;
- L'angle : $\alpha = 30°$;
- Longueur du lac $AB = d = 10m$

On assimile dans cet exercice, le skieur à un point matériel G et on néglige les frottements et toute autre action de l'air.

1- Le skieur quitte le point O à l'instant $t = 0$ avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale.

1.1- En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer l'équation différentielle que vérifie chacune des coordonnées du vecteur vitesse dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1.2- Montrer que l'équation de la trajectoire du skieur s'écrit dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ s'écrit : $y = -\frac{1}{2}g.\frac{x^2}{v_0^2.\cos^2\alpha} + x.\tan\alpha$

2- Déterminer la valeur minimale h_m de la hauteur h pour que le skieur ne tombe pas dans le lac d'eau.

Exercice 12

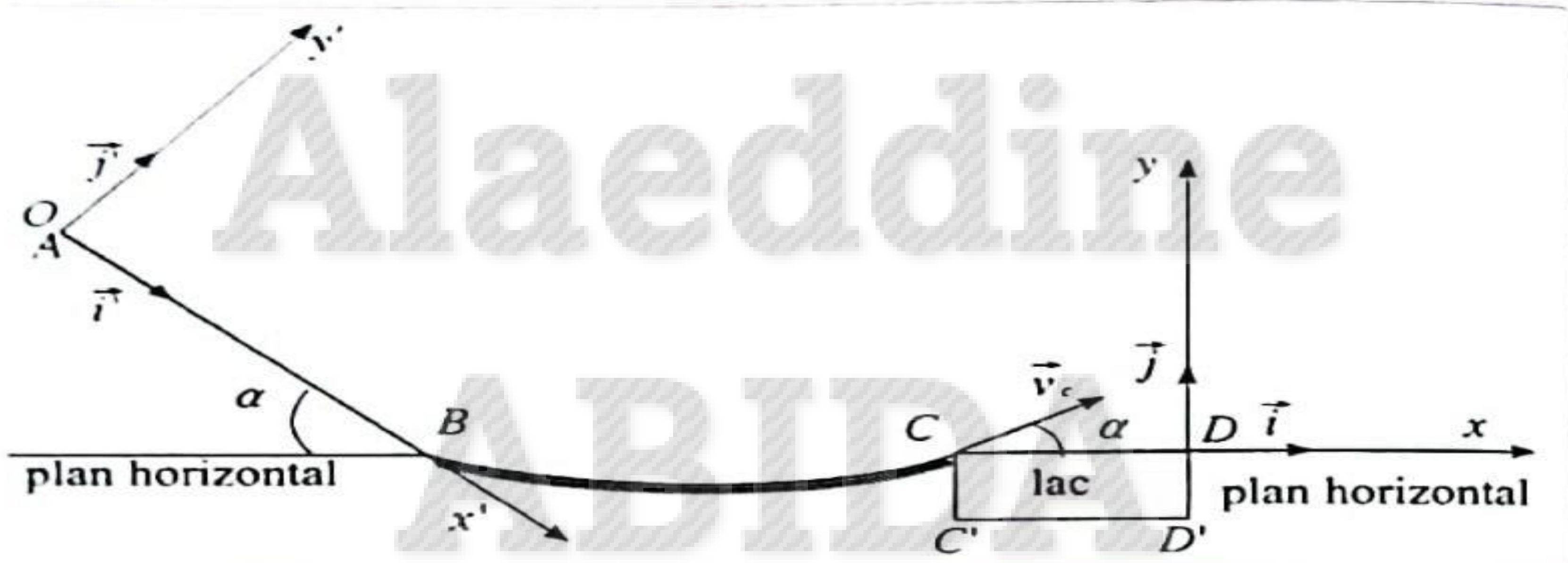
13

Etude du mouvement d'un skieur

Première partie: étude du mouvement d'un skieur (Bac Sc math-2014, session ordinaire)

Un skieur veut s'exercer sur une piste modélisée par la figure 1.

Avant de faire un premier essai, le skieur étudie les forces qui s'exercent sur lui lors du glissage sur la piste ABC.



Données:

- Intensité de pesanteur $g = 9,8 m/s^2$.
- AB est un plan incliné d'un angle $\alpha = 20°$ par rapport au plan horizontal passant par le point B.
- La largeur du lac $C'D' = L = 15m$

On modélise le skieur et ses accessoires par un solide (S) de masse $m = 80kg$ et de centre d'inertie G.

On considère sur la partie AB que les frottements ne sont pas négligeables et on les modélise par une force constante.

1- Etude des forces appliquées sur le skieur entre A et B.

Le skieur part du point A d'abscisse $x'_A = 0$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ sans vitesse initiale à un instant que l'on considère comme origine des temps $t = 0s$ (fig 1). Le skieur glisse sur le plan incliné AB suivant la ligne de la plus grande pente avec une accélération constante a et passe par le point B avec une vitesse $V_B = 20m/s$.

1.1- En appliquant la deuxième loi de Newton, trouver en fonction de α, a et g l'expression du coefficient de frottement $\tan\varphi$. Avec φ l'angle de frottement, défini par la normale à la trajectoire et la direction de la force appliquée par le point incliné sur le skieur.

1.2- A l'instant $t_B = 10s$ le skieur passe par le point B ; calculer la valeur de l'accélération a. En déduire la valeur du coefficient de frottement $\tan\varphi$.

1.3- Montrer que l'intensité de la force $\vec{R}$ exercée par le plan AB sur le skieur s'écrit sous la forme : $R = mg.\cos\alpha.\sqrt{1+(\tan\varphi)^2}$; calculer R.

2- L'étape du saut:

A l'instant $t = 0$ que l'on considère comme une nouvelle origine des temps, le skieur quitte la partie BC au point C avec une vitesse v_C dont le vecteur $\vec{v}_C$ forme l'angle $\alpha = 20°$ avec le plan horizontal.

Lors du saut, les équations horaires du mouvement de (S) dans le repère $(D;\vec{i};\vec{j})$ sont :

$$\begin{cases} x(t) = v_C.\cos\alpha.t - 15 \\ y(t) = -\frac{g}{2}.t^2 + v_C\sin\alpha.t \end{cases}$$

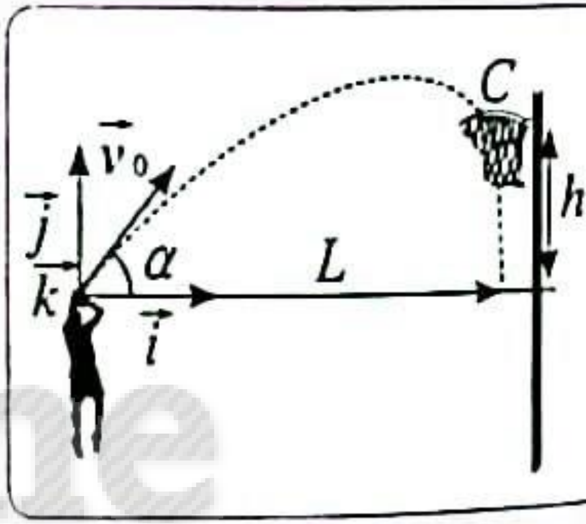
2.1- Déterminer dans le cas où $v_C = 16,27ms^{-1}$ les coordonnées du sommet de la trajectoire de (S).

2.2- Déterminer en fonction de g et α la condition que doit vérifier la vitesse v_C pour que le skieur ne tombe pas dans le lac.

En déduire la valeur minimale de cette vitesse.

Exercice 13

14 La figure ci-contre montre un joueur de basket-ball en train de toucher le centre du panier. La balle est lancée à la date $t=0$, avec une vitesse $\vec{v}_0$ dans le plan du repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. $\vec{v}_0$ fait avec l'axe l'horizontal ox un angle α.



La balle atteint le contour supérieur du panier en son centre C se trouvant à la hauteur h de l'axe $(o;\vec{i})$ et la distance L de l'axe $(o;\vec{j})$.

- Le champ de pesanteur de vecteur $\vec{g}$ est uniforme.
- On néglige l'action de l'air.

1- Montrer que le mouvement de G est plan, et établir l'équation cartésienne de s trajectoire.

2- Etablir que $V_0^2 = \dfrac{g.L}{2\cos^2\alpha\left(\tan\alpha - \dfrac{h}{L}\right)}$.

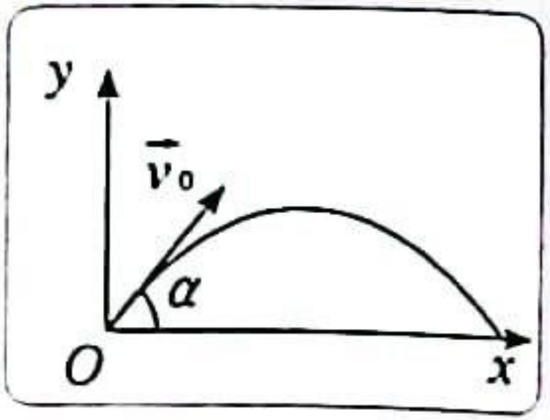
3- La vitesse $\vec{V}_C$ du centre de gravité de la balle au point C fait avec l'axe $(o;\vec{i}$ un angle θ. Montrer que $\tan\theta = \tan\alpha - \dfrac{2h}{L}$

Exercice 14

15

Parabole de sûreté

On lance un corps ponctuel de masse m, à partir du sol avec un vecteur vitesse initial $\vec{V}_0$ incliné d'un angle α par rapport à un plan horizontal (voir figure).



L'équation de la trajectoire du centre de gravité de ce corps dans le plan vertical oxy est : $y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\alpha} + x.\tan\alpha$

On considère que $\vec{V}_0$ constante et que le seul paramètre qu'on puisse faire varier est l'angle α.

1- Montrer que quelque soit α, on a: $y \leqslant \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2} x^2$

On rappelle que $\frac{1}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha + 1$

2- En déduire que les points accessibles G et les points non accessibles à G sont séparés par une courbe dont l'équation et les caractéristiques sont à déterminer.

On considère uniquement le cas $x \geqslant 0$