習題集 $\boxed{3}$

(對應 張旭微積分 極限篇重點三：一些基本函數的極限)

底下的問題屬於體驗性質，讓讀者體會到主題四與主題五的必要性。因此它們稍有難度，我們將活用十種函數的技巧來估計更多函數：

1. Apply the ε-δ defintion to show that $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{3}$

2. Apply the ε-δ defintion to show that $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ if

$$f(x)=\begin{cases}4-2x & \text{if } x<1\\ 6x-4 & \text{if } x\ge 1\end{cases}.$$

3. Apply the ε-δ defintion to show that $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\dfrac{1}{x})=0$

4. Apply the ε-δ defintion to show that $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-2}=8$

5. Apply the ε-δ defintion to show that $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-2x}{3x-4}=1$

6. Apply the ε-δ defintion to show that $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2+3}=2$

7. Apply the ε-δ defintion to show that $\lim\limits_{x\to x_0}\sin(\cos x)=\sin(\cos x_0)$。

8. Apply the ε-δ defintion to show that $\lim_{x\to\pi/4}\tan x=1$

9. Apply the ε-δ defintion to show that $\lim\limits_{x\to x_0}\cos 2x=\cos 2x_0$. [因此到了主題四，我們可以只用加法律跟係數積來證明 $\lim\limits_{x\to x_0}\cos^2 x=\cos^2 x_0$，避開較麻煩的乘法律]

10. Show that when $0<x<\dfrac{\pi}{4}$, we have $\dfrac{1}{2}x<\sin x$. [在學到微分的方法之前，這個不等式可以用來證實在三角函數表的範圍內使用內插法，其誤差不會過大]