การวิเคราะห์และออกแบบหน้าตัดคานรับโมเมนต์ดัดโดยวิธีหน่วยแรงใช้งาน(Working Stress Design)

คานเสริมเหล็กรับแรงดึงอย่างเดียว

(Singly Reinforced Section)

คานเสริมเหล็กรับแรงดึงและแรงอัด

(Doubly Reinforced Section)

คานเสริมเหล็กรับแรงดึงอย่างเดียว
(Singly Reinforced Section)

- การวิเคราะห์หน้าตัด

  เมื่อทราบขนาดหน้าตัดคอนกรีตและปริมาณเหล็กเสริมแล้วต้องการคำนวณหาโมเมนต์ดัดปลอดภัยที่คานรับได้

- การออกแบบหน้าตัด

  เมื่อทราบโมเมนต์ดัดที่หน้าตัดคานต้องรับแล้วคำนวณออกแบบเพื่อหาขนาดหน้าตัดคานและเหล็กเสริมที่เหมาะสม

การวิเคราะห์หน้าตัดคานเสริมเหล็กรับแรงดึงอย่างเดียว

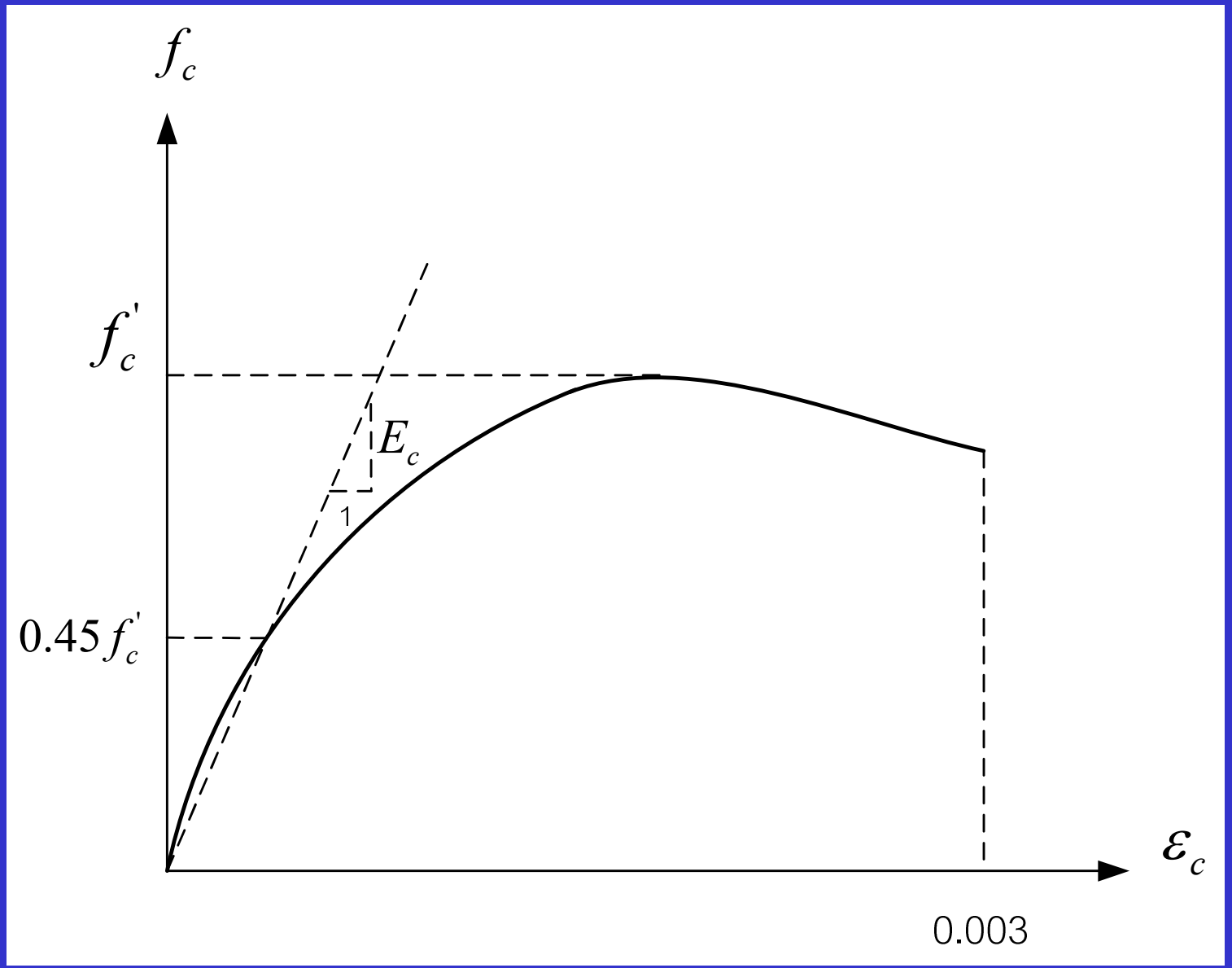
สมมติฐานในการคำนวณ

1) เงื่อนไขของความสอดคล้อง (Compatibility)

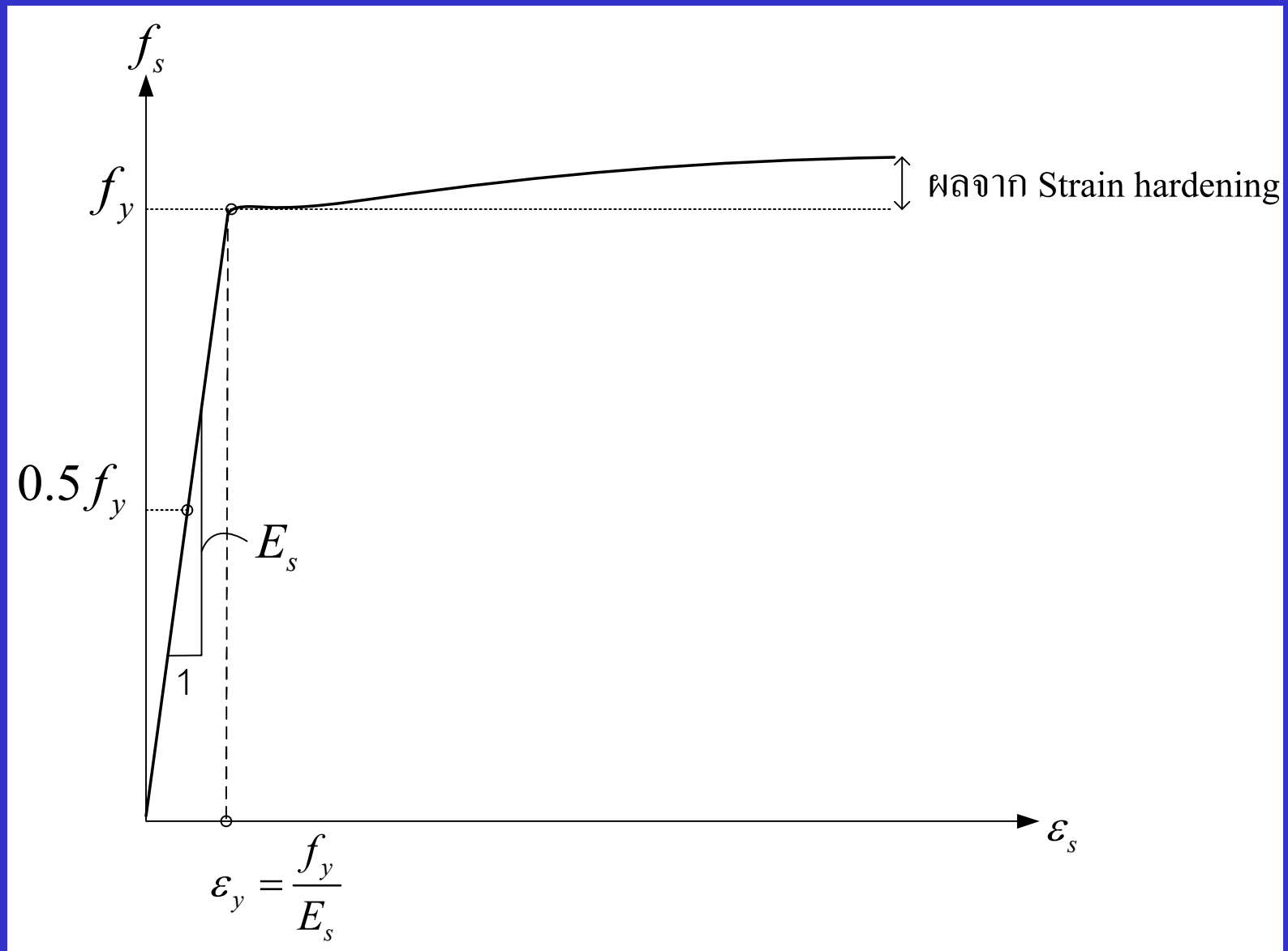
2) กฎแห่งวัสดุ (Constitutive Relation)

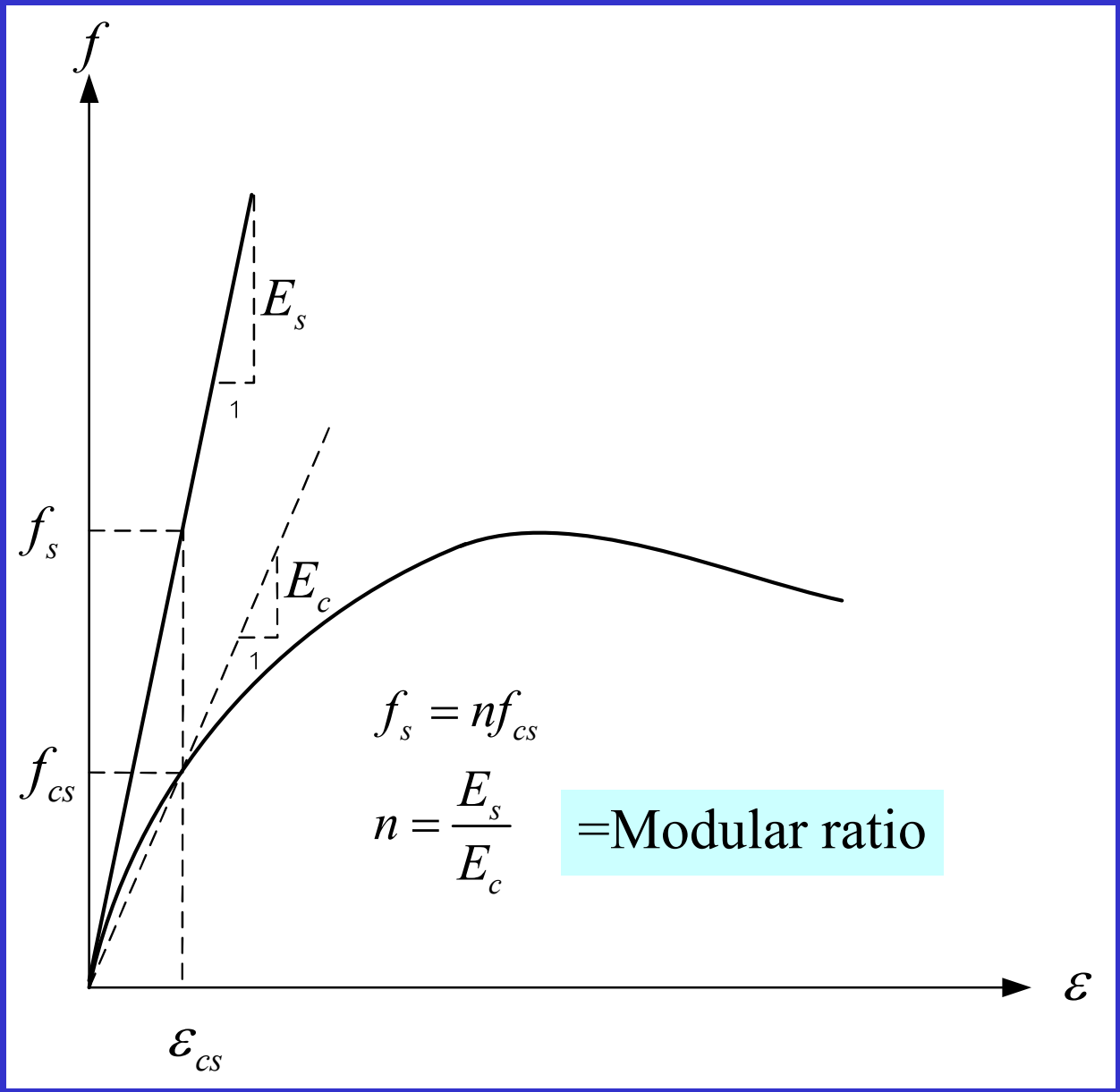
3) เงื่อนไขของความสมดุล (Equilibrium)

ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีต

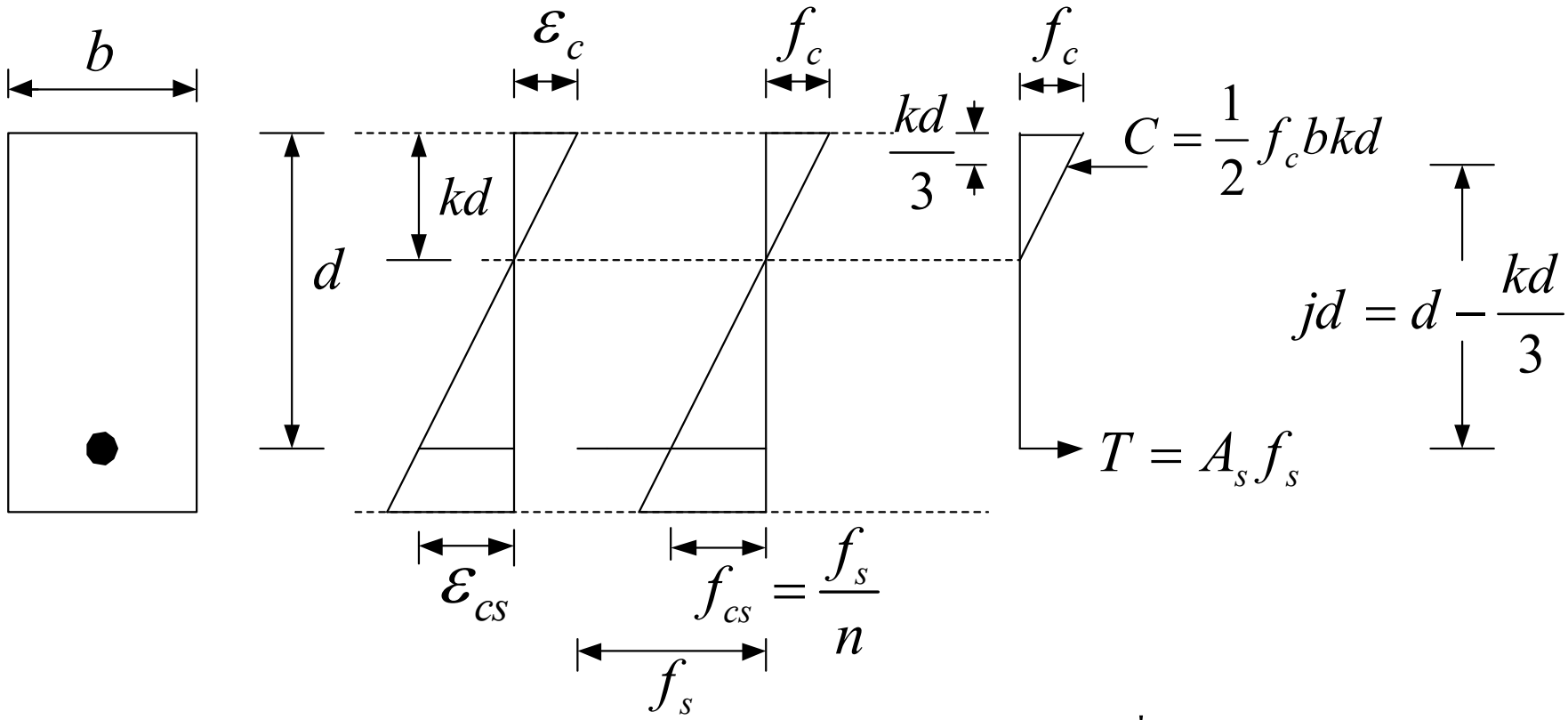


ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของเหล็กเสริม




f
E_s
1
f_s
E_c
1
f_{cs}
$f_s = nf_{cs}$
$n = \frac{E_s}{E_c}$
=Modular ratio
ε
ε_{cs}

การกระจายความเครียด หน่วยแรง และแรงลัพท์ บนหน้าตัดคาน
เสริมเหล็กรับแรงดึงอย่างเดียวเมื่อรับโมเมนต์ดัดกระทำภายนอก



b= ความกว้างของคาน

d= ความลึกประสิทธิผล(Effective depth)

A_s= เนื้อที่หน้าตัดของเหล็กเสริม

k= สัมประสิทธิ์ความลึกประสิทธิผล

f_c = หน่วยแรงที่คอนกรีตผิวบนสุดของคาน

f_s = หน่วยแรงในเหล็กเสริม

f_{cs} = หน่วยแรงในคอนกรีตที่ระดับเดียวกันกับเหล็กเสริม

เงื่อนไขของความสมดุล (Equilibrium)

$$C = T \longrightarrow \frac{1}{2} f_c kdb = A_s f_s$$

$$M_c = Cjd = \frac{1}{2} f_c kdbjd$$

$$M_c = Rbd^2 \qquad R = \frac{1}{2} f_c kj \qquad j = 1 - \frac{k}{3}$$

$$M_s = Tjd = A_s f_s jd$$

เงื่อนไขของความสอดคล้อง(Compatibility)

$$\frac{f_c}{kd} = \frac{\frac{f_s}{n}}{d-kd} \longrightarrow f_c = \frac{f_s}{n}\left(\frac{k}{1-k}\right)$$

$$f_s = nf_c\frac{1-k}{k}$$

ถ้าให้เปอร์เซ็นต์เหล็กเสริม $\rho = \frac{A_s}{bd}$ แล้วแทนค่า f_s

ลงในสมการสมดุล $\frac{1}{2}f_c kdb = A_s f_s$ แล้วจัดเทอมจะได้ว่า

$$k^2 + 2n\rho k - 2n\rho = 0$$

$$k = \sqrt{(n\rho)^2 + 2n\rho} - n\rho$$

การวิเคราะห์หน้าตัด

ในกรณีที่ทราบขนาดความกว้าง ความลึก ของหน้าตัดและพื้นที่หน้าตัดของเหล็กเสริมแล้วต้องการคำนวณหาโมเมนต์ดัดปลอดภัยสูงสุดที่หน้าตัดจะรับได้

เมื่อคานรับโมเมนต์ดัดปลอดภัยสูงสุดจะต้องไม่ทำให้เกิดหน่วยแรงในคอนกรีตและเหล็กเสริมเกินกว่าหน่วยแรงที่ยอมให้

เมื่อคานรับโมเมนต์ดัดปลอดภัยสูงสุดหน่วยแรงในคอนกรีตและเหล็กเสริมจะเป็นไปได้ 3กรณี

กรณีหน่วยแรงในเหล็กเสริมและคอนกรีตเท่ากับหน่วยแรงที่ยอมให้พอดีแสดงว่าหน้าตัดนั้นเป็นแบบสมดุล(Balanced section)

กรณีหน่วยแรงในเหล็กเสริมถึงค่าที่ยอมให้แล้วแต่หน่วยแรงในคอนกรีตยังไม่ถึงค่าที่ยอมให้ หน้าตัดดังกล่าวจะเป็นแบบเสริมเหล็กเมื่อเทียบกับหน้าตัดคอนกรีต ($\rho = \frac{A_s}{bd}$) น้อยกว่าหน้าตัดแบบสมดุล (Under reinforced section)

กรณีหน่วยแรงในเหล็กเสริมยังไม่ถึงค่าที่ยอมให้แต่หน่วยแรงในคอนกรีตถึงค่าที่ยอมให้ หน้าตัดดังกล่าวจะเป็นแบบเสริมเหล็กเมื่อเทียบกับหน้าตัดคอนกรีต($\rho = \frac{A_s}{bd}$) มากกว่าหน้าตัดแบบสมดุล (Over reinforced section)

ขั้นตอนการการวิเคราะห์หน้าตัดเพื่อหาโมเมนต์ดัดสูงสุดที่หน้าตัดคานจะรับได้เมื่อทราบขนาดของคานและปริมาณเหล็กเสริม

1) คำนวณหาเปอร์เซ็นต์เหล็ก $\rho = \frac{A_s}{bd}$ $n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2.04(10)^6}{15210\sqrt{f_c'}} = \frac{135}{\sqrt{f_c'}}$

2) คำนวณหาค่า $k = \sqrt{(n\rho)^2 + 2n\rho} - n\rho$

3) ตรวจสอบว่าหน้าตัดเป็นแบบ Balance ,Over หรือUnder Reinforce โดยอาจสมมติให้คอนกรีตถึงหน่วยแรงที่ยอมให้แล้วลองคำนวณ

$$f_s = nf_c \frac{1-k}{k}$$

ถ้า f_s ถึงค่าที่ยอมให้พอดีแสดงว่าหน้าตัด **เป็นหน้าตัดสมดุล** โมเมนต์ดัดปลอดภัยที่หน้าตัดคานรับได้จะหาได้จากสมการ

$$M_c = Rbd^2 \qquad R = \frac{1}{2} f_c kj \qquad j = 1 - \frac{k}{3}$$

หรือ

$$M_s = Tjd = A_s f_s jd$$

เมื่อ f_c และ f_s เป็นหน่วยแรงที่ยอมให้

ถ้าสมมติให้คอนกรีตถึงหน่วยแรงที่ยอมให้แล้ว คำนวณ f_s ได้น้อยกว่าค่าที่ยอมให้แสดงว่าหน้าตัดเป็นOver reinforce

โมเมนต์ดัดปลอดภัยที่หน้าตัดคานรับได้จะหาได้จากสมการ

$$M_c = Rbd^2 \qquad R = \frac{1}{2} f_c kj \qquad j = 1 - \frac{k}{3}$$

หรือ

$$M_s = Tjd = A_s f_s jd$$

โดยการแทนค่า f_s = ค่าที่คำนวณได้จากสมการ

$$f_s = nf_c \frac{1-k}{k}$$

f_c = หน่วยแรงที่ยอมให้

ถ้า f_s มากกว่าค่าที่ยอมให้แสดงว่าหน้าตัดเป็น Under reinforce แสดงว่าเมื่อหน่วยแรงในเหล็กเสริมถึงค่าที่ยอมให้หน่วยแรงในคอนกรีตจะยังไม่ถึงหน่วยแรงที่ยอมให้ โมเมนต์ดัดปลอดภัยที่หน้าตัดคานรับได้จะหาได้จากสมการ

$$M_c = Rbd^2 \qquad R = \frac{1}{2} f_c kj \qquad j = 1 - \frac{k}{3}$$

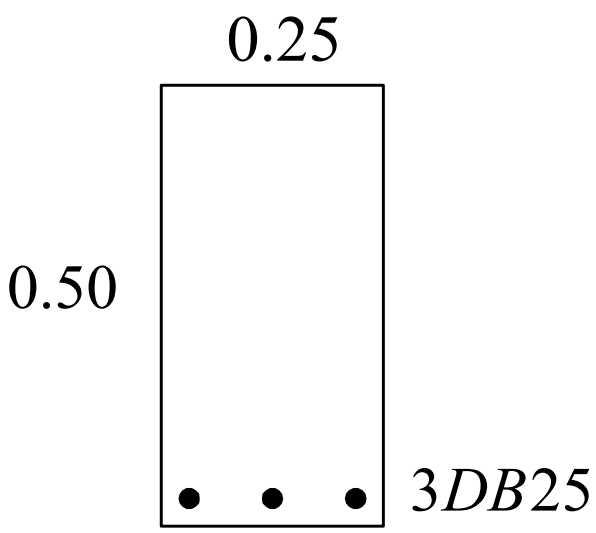
หรือ

$$M_s = Tjd = A_s f_s jd$$

โดยการแทนค่า $f_s =$ หน่วยแรงที่ยอมให้

$$f_c = \frac{f_s}{n}\left(\frac{k}{1-k}\right)$$

ตัวอย่าง จงคำนวณโมเมนต์ดัดสูงสุดที่หน้าตัดคานคอนกรีตเสริมเหล็กรับแรงดึงอย่างเดียวดังแสดงในรูป จะรับได้เมื่อกำหนดกำลังรับหน่วยแรงอัดประลัยของคอนกรีต $f_c^{'} = 210\ ksc$



หน่วยแรงอัดที่ยอมให้ของคอนกรีต

$$f_c = 0.45 f_c^{'} = 0.45(210) = 94.5\ ksc$$

กำลังรับแรงดึงที่จุดครากของเหล็กเสริม

$$f_y = 3000 ksc$$

หน่วยแรงดึงปลอดภัยของเหล็กเสริม

$$f_s = 0.5 f_y = 0.5(3000) = 1500 ksc$$

$$k = \sqrt{(n\rho)^2 + 2n\rho} - n\rho$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2.04(10)^6}{15210\sqrt{f_c'}} = \frac{135.4}{\sqrt{f_c'}} = \frac{135.4}{\sqrt{210}} = 9.32$$

สมมติระยะจากท้องคานถึงจุดศูนย์ถ่วงของเหล็กเสริมเท่ากับ 5 ซม.

$$d = 50 - 5 = 45cm$$

$$A_s = 3(4.91) = 14.73cm^2$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{14.73}{(25)(45)} = 0.013$$

$$k = \sqrt{\left[9.32(0.013)\right]^2 + 2(9.32)(0.013)} - 9.32(0.013) = 0.387$$

สมมติขณะที่คานรับโมเมนต์ดัดใช้งานสูงสุดหน่วยแรงในคอนกรีตถึงค่าที่ยอมให้

$$f_c = 94.5ksc$$

$$f_s = nf_c \frac{1-k}{k}$$

$$f_s = (9.32)(94.5)\frac{1-0.387}{0.387} = 1395ksc < 1500ksc$$

หน้าตัดเป็นแบบเสริมเหล็กเมื่อเทียบกับหน้าตัดคอนกรีตมากกว่าสภาวะสมดุล (Over reinforced section)

โมเมนต์ดัดปลอดภัยอาจคำนวณจากสมการ

$$M = M_c = Rbd^2$$

เมื่อแทนหน่วยแรงอัดในคอนกรีตเท่ากับหน่วยแรงที่ยอมให้

$$j = 1 - \frac{0.387}{3} = 0.871$$

$$R = \frac{1}{2} f_c kj = \frac{1}{2}(94.5)(0.387)(0.871) = 15.93 ksc$$

$$M = Rbd^2 = 15.93(25)(45)^2 = 805,904 \ kg - cm$$

หรือ

$$M = 8.06 \ ton - m$$

หรืออาจคำนวณจากสมการ

$$M = M_s = A_s f_s jd$$

เมื่อหน่วยแรงในเหล็กเสริมเป็นค่าที่คำนวณได้เมื่อสมมติให้หน่วยแรงอัดในคอนกรีตถึงค่าที่ยอมให้

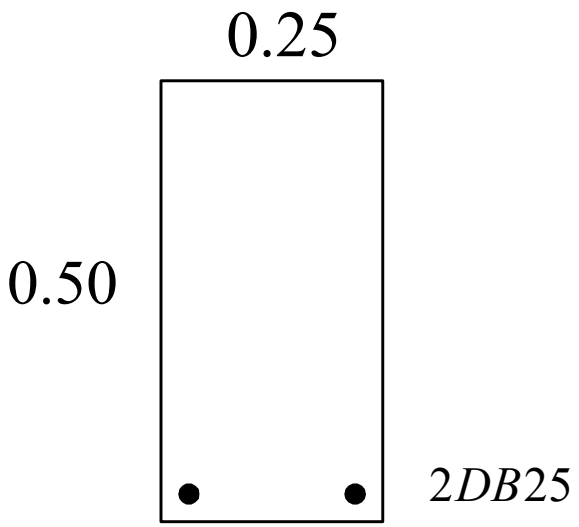
$$f_s = nf_c \frac{1-k}{k} = 9.32(94.5)\frac{1-0.387}{0.387} = 1396\ ksc$$

$$M = A_s f_s jd = 14.73(1396)(0.871)(45) = 805{,}904\ kg-cm$$

$$M = 8.06\ ton-m$$

ตัวอย่าง จงคำนวณโมเมนต์ดัดสูงสุดที่หน้าตัดคานคอนกรีตเสริมเหล็กรับแรงดึงอย่างเดียวดังแสดงในรูปจะรับได้เมื่อกำหนด

กำลังรับหน่วยแรงอัดประลัยของคอนกรีต $f_c^{'} = 210\ ksc$



หน่วยแรงอัดที่ยอมให้ของคอนกรีต

$$f_c = 0.45 f_c^{'} = 0.45(210) = 94.5\ ksc$$

กำลังรับแรงดึงที่จุดครากของเหล็กเสริม

$$f_y = 3000 ksc$$

หน่วยแรงดึงปลอดภัยของเหล็กเสริม

$$f_s = 0.5 f_y = 0.5(3000) = 1500 ksc$$

$$k = \sqrt{(n\rho)^2 + 2n\rho} - n\rho$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{135.4}{\sqrt{f_c'}} = \frac{135.4}{\sqrt{210}} = 9.32$$

สมมติระยะจากท้องคานถึงจุดศูนย์ถ่วงของเหล็กเสริมเท่ากับ 5 ซม.

$$d = 50 - 5 = 45cm$$

$$A_s = 2(4.91) = 9.82\,cm^2$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{9.82}{(25)(45)} = 0.0087$$

$$k = \sqrt{\left[9.32(0.0087)\right]^2 + 2(9.32)(0.0087)} - 9.32(0.0087) = 0.33$$

สมมติขณะที่คานรับโมเมนต์ดัดใช้งานสูงสุดหน่วยแรงในคอนกรีตถึงค่าที่ยอมให้

$$f_c = 94.5 ksc$$

จะคำนวณหน่วยแรงในเหล็กเสริมได้จาก

$$f_s = (9.32)(94.5)\frac{1-0.33}{0.33} = 1787 ksc > 1500 ksc$$

แสดงว่าที่สภาวะใช้งานหน่วยแรงในเหล็กเสริมถึงค่าที่ยอมให้ แต่หน่วยแรงในคอนกรีตยังไม่ถึงค่าที่ยอมให้

หน้าตัดดังกล่าวจึงเป็นแบบเสริมเหล็กเมื่อเทียบกับหน้าตัดคอนกรีตน้อยกว่าสภาวะสมดุล (Under reinforced section)

ดังนั้นโมเมนต์ดัดปลอดภัยที่หน้าตัดคานรับได้จะคำนวณได้จาก

$$M = M_s = A_s f_s jd$$

เมื่อหน่วยแรงดึงในเหล็กเสริมจะเท่ากับหน่วยแรงดึงที่ยอมให้

$$j = 1 - \frac{0.33}{3} = 0.89$$

$$M = A_s f_s jd = 9.82(1500)(0.89)(45) = 589,919\ kg - cm$$

หรือ $M = 5.9\ ton - m$

โมเมนต์ดัดปลอดภัยที่หน้าตัดคานรับได้อาจคำนวณจากสมการ

$$M = M_c = Rbd^2$$

โดยหน่วยแรงในคอนกรีตเป็นค่าที่เกิดขึ้นจริงน้อยกว่าค่าที่ยอมให้ซึ่งคำนวณได้จากสมการ

$$f_c = \frac{f_s}{n}\left(\frac{k}{1-k}\right)$$

เมื่อแทนค่าให้หน่วยแรงในเหล็กเสริมเป็นหน่วยแรงที่ยอมให้

$$f_c = \frac{f_s}{n}\left(\frac{k}{1-k}\right) = \frac{1500}{9.32}\left(\frac{0.33}{1-0.33}\right) = 79.33\,ksc$$

$$R = \frac{1}{2} f_c kj = \frac{1}{2}(79.33)(0.33)(0.89) = 11.65\,ksc$$

$$M = Rbd^2 = 11.65(25)(45)^2 = 589919\ \ kg-cm$$

หรือ $\boxed{M = 5.9\ ton-m}$