

Chapter 1. 연립일차방정식과 행렬

1.2 가우스 (-요르단) 소거법

(1) 행사다리꼴과 기약행사다리꼴

첨가행렬의 행들을 (1)연산을 통하여 (2)간단한 형태로 변경하여 일차연립방정식의 해를 구하는 방법입니다

(1) 연산

- ① 0이 아닌 상수를 행에 곱하기
- ② 두 행을 바꾸기
- ③ 한 행의 상수배를 다른 행에 더하여 다른 행을 변경하기

(2) 간단한 형태

① 행사다리꼴(echelon form)

- ㉠ 모든 원소가 0이 아닌 행에서 맨 처음 0이 아닌 수는 1이어야 되며 이를 선도 1이라고 합니다
- ㉡ 모든 원소가 0인 행이 있다면 그 행은 맨 밑의 행으로 내려갑니다
- ㉢ 위에 있는 행의 선도1은 아래 있는 선도1 보다 왼쪽에 있어야 됩니다

② 기약 행사다리꼴(Reduced Row echelon form)

- ㉠ 위의 행사다리꼴(echelon form)의 ㉠, ㉡, ㉢ 조건을 만족합니다
- ㉡ 선도1이 있는 열에서 선도1을 제외한 나머지 원소들은 모두 0이어야 합니다

Chapter 1. 연립일차방정식과 행렬

ex) 다음 행렬에서 선도1을 구하고 행사다리꼴(echelon form)과 기약행사다리꼴(Reduced Row echelon form)을 구별하시오

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 9 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(2)가우스 소거법

첨가행렬(원행렬)을 연산을 통해 행사다리꼴(echelon form)로 변경하여 연립일차방정식의 해를 구하는 방법

ex) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ 을 기본 행연산을 이용하여 행사다리꼴(echelon form)으로 변경하시오

ex) $x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0$

$$2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1$$

$$5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5$$

$$2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6$$

의 해를 가우스 소거법을 사용하여 구하시오

Chapter 1. 연립일차방정식과 행렬

(3)가우스-요르단 소거법

첨가행렬(원행렬)을 연산을 통해 기약행사다리꼴(Reduced Row echelon form)로 변경하여 연립일차방정식의 해를 구하는 방법

$$ex) \quad x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0$$

$$2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1$$

$$5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5$$

$$2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6$$

의 해를 가우스 요르단 소거법을 사용하여 구하시오

(4)동차 일차 연립방정식

상수항이 0인 연립일차방정식을 동차 일차 연립방정식이라고 합니다

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

이 연립방정식의 해는 자명해 또는 무수히 많은 해가 존재할 수 있습니다.

자명해는 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 인 경우로 너무나 뻔한 결과이므로 trivial solution 이라고도 합니다

여기서 관심사는 자명해 이외의 해이며 이 경우 첨가행렬을 행사다리꼴 또는 기약행사다리꼴의 형태로 변경하였을 때 모든 요소가 0인 행이 존재하게 됩니다

이러한 경우의 해를 구할 경우 자유변수를 선정하여 해를 구합니다.

선도변수는 선도1이 있는 열과 관계있는 변수이며 그 나머지 변수는 자유변수가 됩니다

Chapter 1. 연립일차방정식과 행렬

$$\text{ex) } x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0$$

$$2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = 0$$

$$5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 0$$

$$2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 0$$

의 해를 가우스 소거법을 사용하여 구하시오

Sam's Math & Application