問題の解き方と答案のつくり方

第１回　集合と論理・式と証明

林 俊介

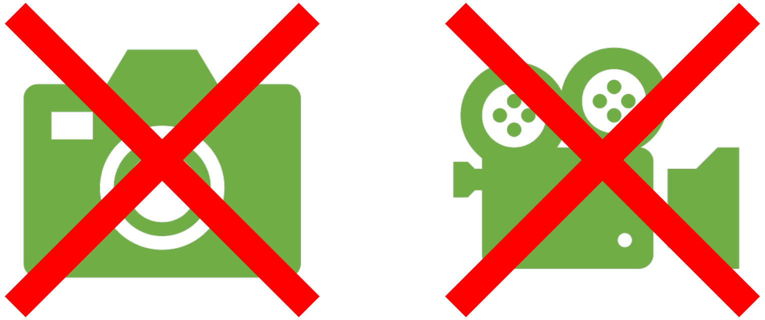
PDF 教材との使い分け

1

➢PDF 教材を開きつつの視聴を推奨します。
動画では，PDF のうち重要な箇所を解説するほか，答案例や受講生の実際の答案についても詳しくご紹介します。

スクリーンショットおよび録画について

2



➢動画のスクリーンショットを撮影したり，動画を録画したりするのはご遠慮ください。また，それらをSNS 等を通じて他者に共有するのはおやめください。

この講座の感想等の共有について

3

#問題の解き方と答案のつくり方

- 講座で学んだことのまとめやご感想は，遠慮なくTwitter 等で発言してください。
(林がリアクションします！)

- この講座について発言する際は，#問題の解き方と答案のつくり方というハッシュタグをつけて頂くとTweet を見つけやすくなります。

質問や誤りのご指摘について

4

- 質問がある場合は,
  質問フォームでご連絡ください。

- 誤り・不適切と思われる箇所があった場合も，お手数お掛けし恐縮ですがご連絡いただけると幸いです。

再掲：この講座の目的

東大・京大の数学過去問を用いた演習と解説により

▶ 高い難度・重い問題を解ききる力

▶ 論理的で簡潔な答案を作成する力

を養うこと。

再掲：答案作成で大切なこと

“これを書かないとバツになるのか”
“何を書けば部分点がくるのか”　　ではなく，
“この記号は使ってよいのか”

問われたことに論理的かつ簡潔に答えるだけでよい。

再掲：よい答案とはどういうものか

以下をみたすようなものがよいと林は考えています。

- ▶ 過不足がない
- ▶ 読みやすく構造化されている
- ▶ 論理に誤りや飛躍がない
- ▶ ストレスなく判読できる
- ▶ 図や表が有効に活用されている

など

第１回

集合と論理・式と証明

第１回の問題 (1A)

実数を係数とする 3 次式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ に対し, 次の条件を考える。

(イ) 方程式 $f(x) = 0$ の解であるすべての複素数 α に対し,
α^3 もまた $f(x) = 0$ の解である。

(ロ) 方程式 $f(x) = 0$ は虚数解を少なくとも 1 つもつ。

この 2 つの条件 (イ), (ロ) を同時に満たす 3 次式をすべて求めよ。

1A 京都大学 2016年 文系 [5]

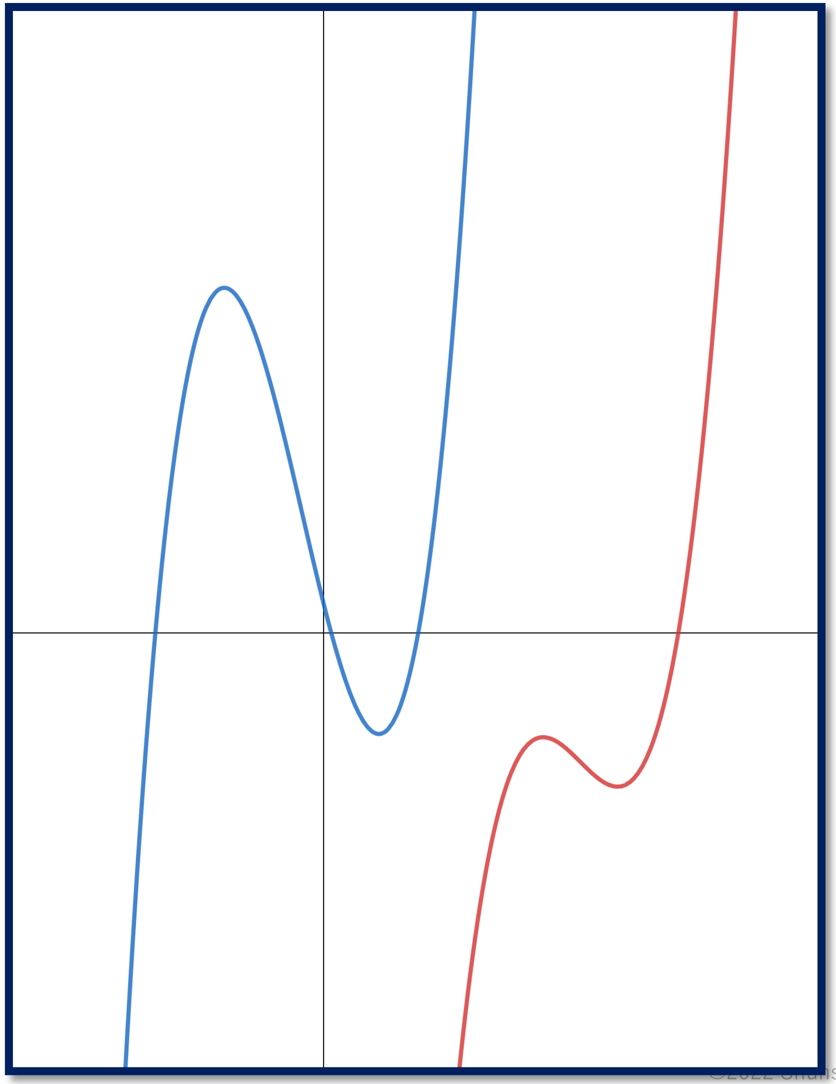
問題選択の意図

- 以下の理由により，論理的思考力を問えると考えた。
  - 実数係数の方程式だからこそ成り立つ性質を用いる。
  - 条件（イ）を拡大解釈しがちであり，議論の組み立てに注意を要する。
  - 3 つの解の 3 乗ともとの 3 つの解の対応関係で場合分けをする。
- 以下の理由により，実戦的な問題解決力を問えると考えた。
  - 虚数解 α についての方程式 $\alpha^3 = \bar{\alpha}$ を解くのはやや難しいが，
    スマートな解法が分からなくても $\alpha = p + qi$ などとおくことで解ける。
  - “実数解の 3 乗はもとの実数解と一致するしかない” という
    キツい条件に着目することで解決に至る。

1A 解説

① 実数係数の 3 次方程式の解の性質

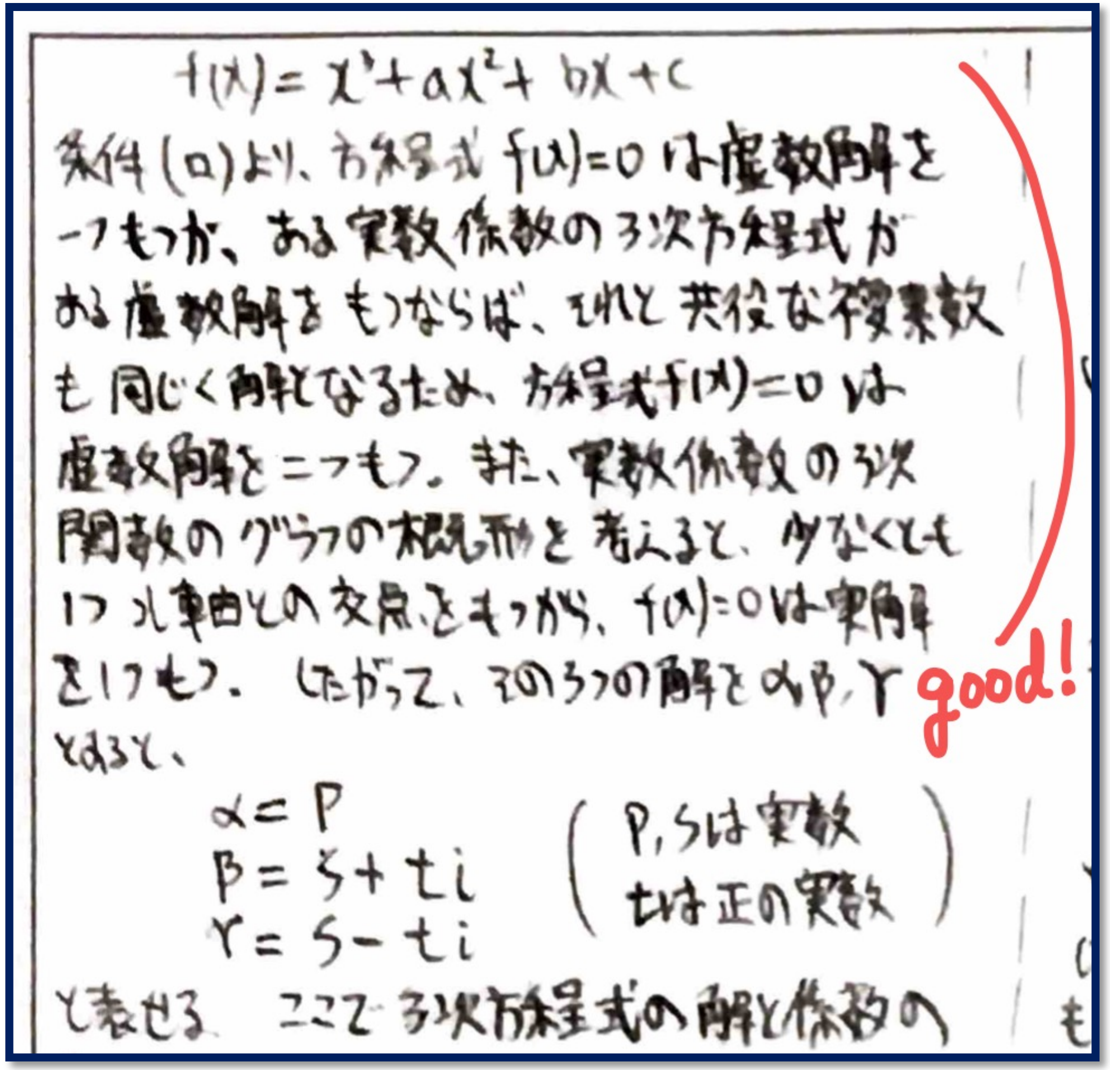
- **実数係数の 3 次方程式 $f(x) = 0$ は，少なくとも 1 つの実数解をもつ。**
  - 十分に絶対値が大きい x をとれば $f(x)$ をいくらでも大きくしたり小さくしたりできる。
- **残りの 2 つの解は “いずれも実数” あるいは “いずれも虚数” である。**
  - 今回は “いずれも虚数” のタイプ。
  - すべて実数解の場合，2 重解のこともあれば 3 重解のこともある。

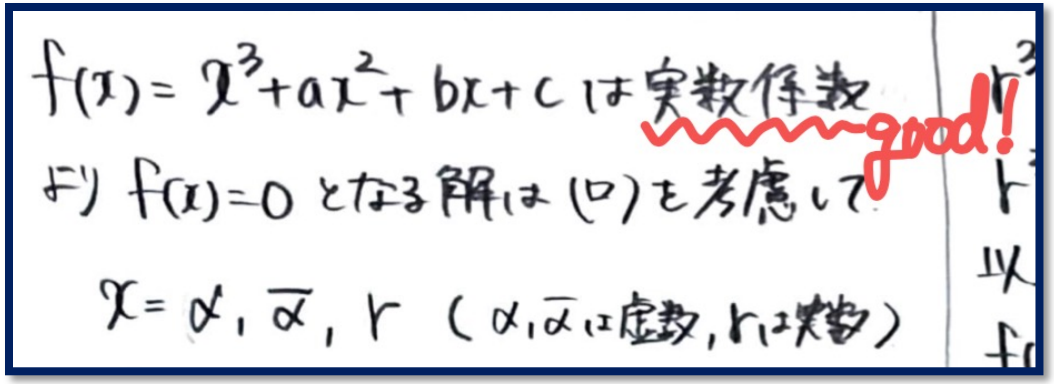


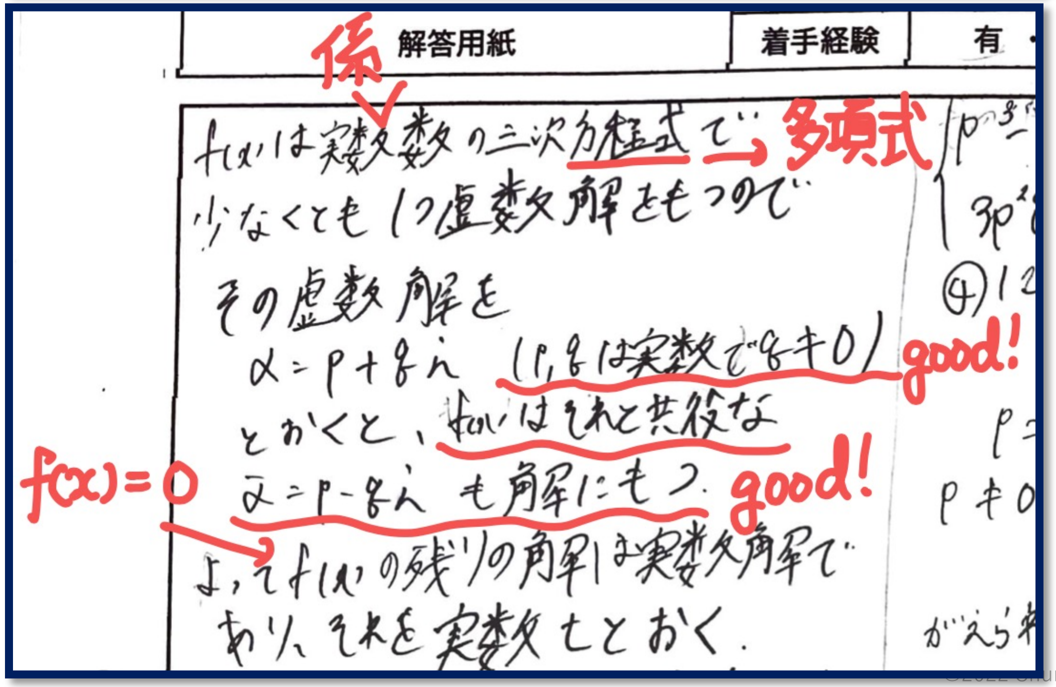
① 実数係数の 3 次方程式の解の性質

- **実数係数の 3 次方程式 $f(x)=0$ が 1 つの実数解と 2 つの虚数解をもつとき，2 つの虚数解は互いに共役である。**
  - **説明 1**
    唯一ある実数解を t とすると，$f(x)=(x-t)(x^2+ux+v)$ と因数分解できることになり，実数係数の 2 次方程式 $x^2+ux+v=0$ の 2 解が "2 つの虚数解" であるが，それらは互いに共役である。(cf. 解の公式)
  - **説明 2**
    虚数 α に対し $f(\bar{\alpha})=\overline{f(\alpha)}$ が成り立つため，$f(\alpha)=0$ であれば
    $f(\bar{\alpha})=\overline{f(\alpha)}=\bar{0}=0$ となるから，$\bar{\alpha}$ も解である。

① 実数係数の 3 次方程式の解の性質







② 解集合と各解の 3 乗の値の関係

(イ) 方程式 $f(x)=0$ の解であるすべての複素数 α に対し，α^3 もまた $f(x)=0$ の解である。

(ロ) 方程式 $f(x)=0$ は虚数解を少なくとも 1 つもつ。

- ここまでの議論と条件（ロ）より，今回の方程式 $f(x)=0$ の 3 つの解は，実数 t と虚数 α を用いて $t,\alpha,\bar{\alpha}$ と書ける。
  （**3 次方程式 $f(x)=0$ の解集合は $A\coloneqq\{t,\alpha,\bar{\alpha}\}$ である。**）

- α の虚部を正（または負）に限定すれば，最終的に出てくる虚数の組を一方に限定することができる。（必須ではない。）

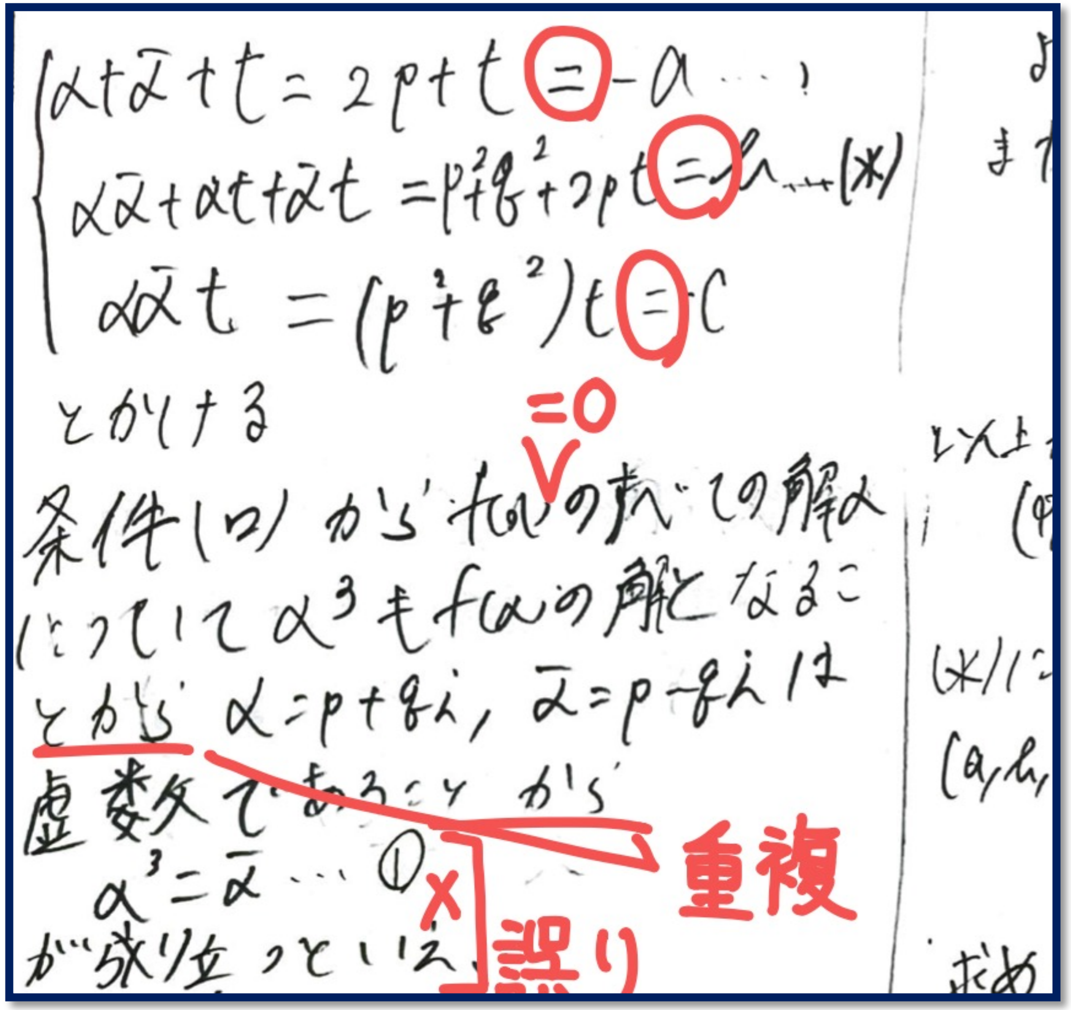
② 解集合と各解の 3 乗の値の関係

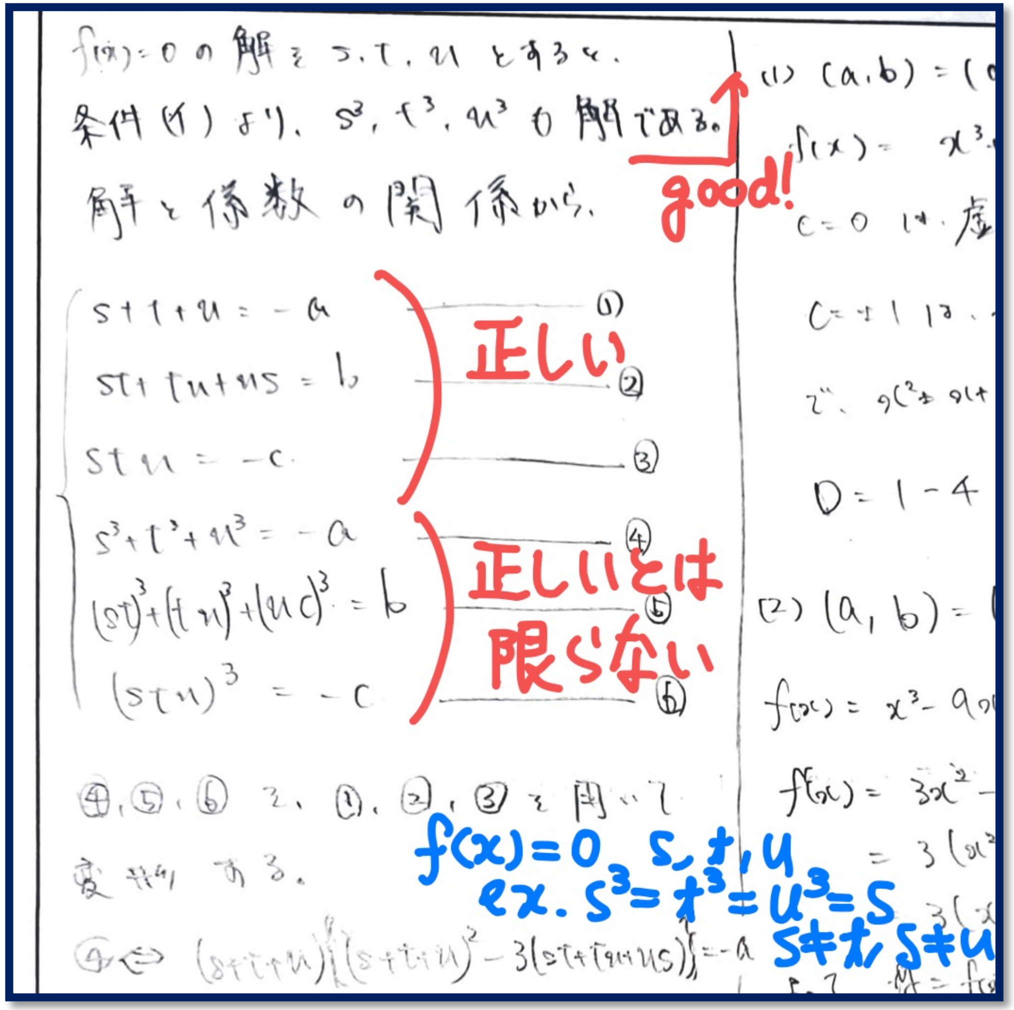
(イ) 方程式 $f(x)=0$ の解であるすべての複素数 α に対し，α^3 もまた $f(x)=0$ の解である。

(ロ) 方程式 $f(x)=0$ は虚数解を少なくとも 1 つもつ。

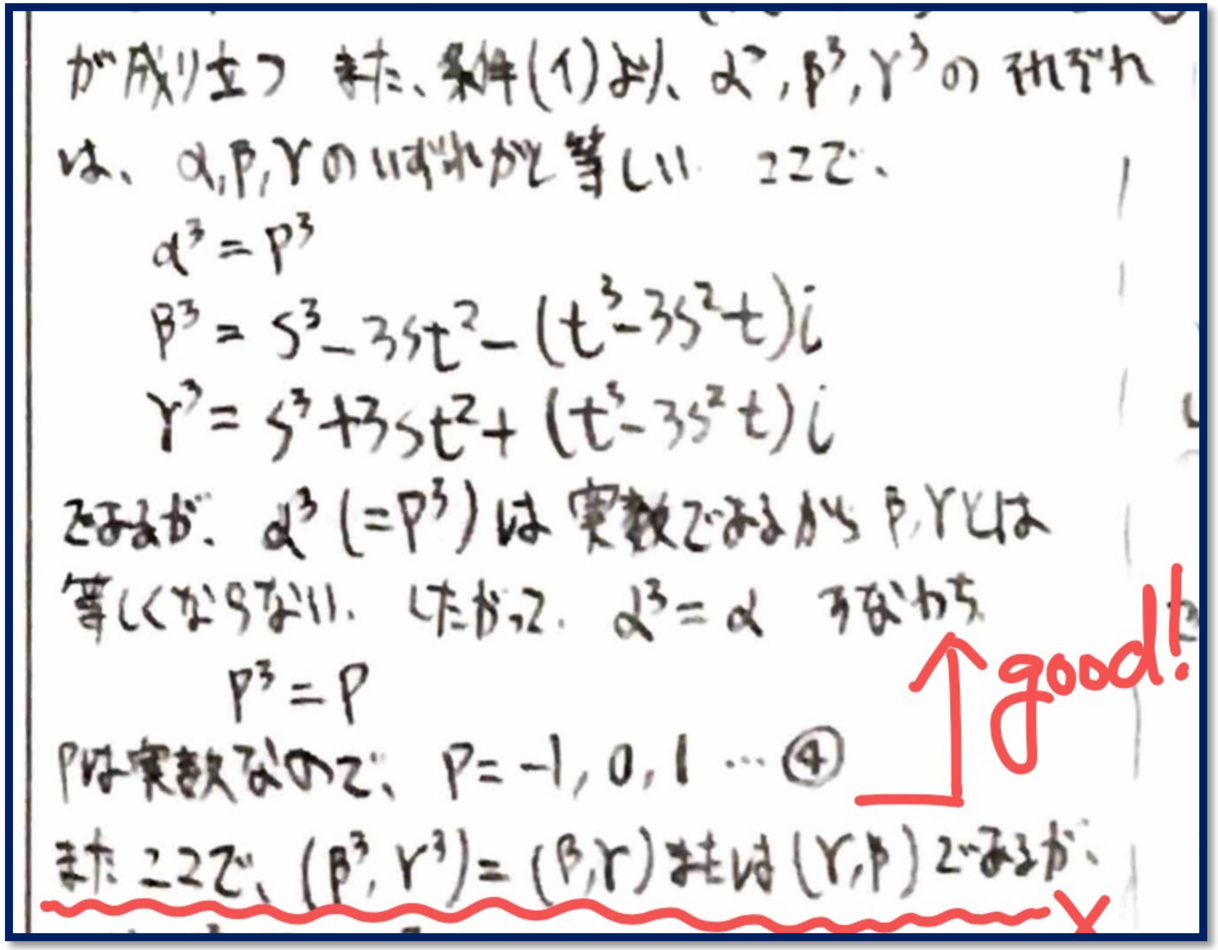
- 条件（イ）より，各々の 3 乗 $t^3, \alpha^3, \bar{\alpha}^3$ も $f(x)=0$ の解である。
  ($t^3, \alpha^3, \bar{\alpha}^3$ はいずれも解集合 $A(=\{t, \alpha, \bar{\alpha}\})$ の要素である。)
  - ここでミスが発生しやすい。条件（イ）は，あくまで $t^3, \alpha^3, \bar{\alpha}^3$ 各々が集合 A の要素であるということ ($t^3, \alpha^3, \bar{\alpha}^3 \in A$) しか主張しておらず，
    $A=\{t^3, \alpha^3, \bar{\alpha}^3\}$ ということは意味していない。（複数名がここでミス）
  - **極端な例としては $t^3=\alpha^3=\bar{\alpha}^3=t$ であってもよいし，**
    実際にそのようなケースが本問でも実現する。($f(x)=x^3-1$ など)

② 解集合と各解の３乗の値の関係





② 解集合と各解の 3 乗の値の関係


が成り立つ また、条件(イ)より、$\alpha^3, \beta^3, \gamma^3$ のそれぞれは、α, β, γ のいずれかと等しい ここで、

$\alpha^3 = p^3$

$\beta^3 = s^3 - 3st^2 - (t^3 - 3s^2t)i$

$\gamma^3 = s^3 + 3st^2 + (t^3 - 3s^2t)i$

であるが、$\alpha^3 (= p^3)$ は実数であるから β, γ とは等しくならない。したがって $\alpha^3 = \alpha$ すなわち

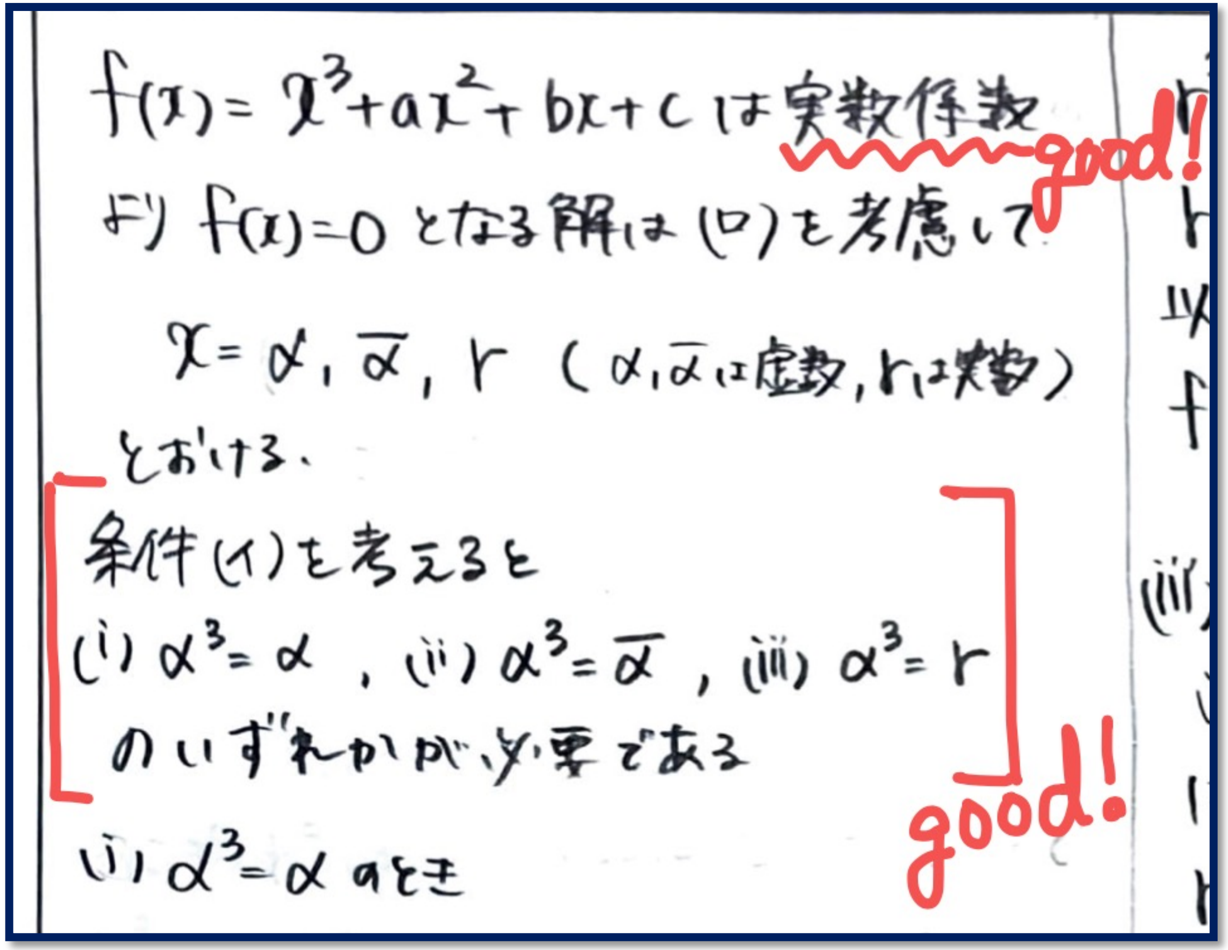
$p^3 = p$

p は実数なので、$p = -1, 0, 1$ …④

good!

また ここで、$(\beta^3, \gamma^3) = (\beta, \gamma)$ または (γ, β) であるが、

×


$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は実数係数

good!

より $f(x) = 0$ となる解は(ロ)を考慮して

$x = \alpha, \bar{\alpha}, r$ （$\alpha, \bar{\alpha}$ は虚数, r は実数）

とおける。

条件(イ)を考えると

(i) $\alpha^3 = \alpha$, (ii) $\alpha^3 = \bar{\alpha}$, (iii) $\alpha^3 = r$

のいずれかが必要である

good!

(i) $\alpha^3 = \alpha$ のとき

② 解集合と各解の 3 乗の値の関係

- では，t^3 が $t, \alpha, \bar{\alpha}$ のどれかで 3 通り，α^3 や $\bar{\alpha}^3$ についても同様に 3 通りで，$3 \times 3 \times 3 = 27$ 通りあるのか？
  → **$t \in \mathbb{R}$ より $t^3 \in \mathbb{R}$ であるため，必ず $t^3 = t$ となる。**

- $t^3 = t$ より $t = 0, 1, -1$ に限定されるため，
  あとは $\alpha^3, \bar{\alpha}^3$ が $t, \alpha, \bar{\alpha}$ のどれと等しいかで場合分けをする。
  → **ただし，$\bar{\alpha}^3 = \overline{\alpha^3}$ であるため，α^3 の場合分けのみでよい。**
  さらに，$\alpha^3 = \alpha$ とはならない。$(\because \alpha \notin \mathbb{R})$

- 結局，場合分けは $3 \times 2 = 6$ 通りでよい。

③ 複素数の方程式 $\alpha^3 = \bar{\alpha}$ の解き方

- 途中で $\alpha^3 = \bar{\alpha}$ という方程式を解くことになる。
  → **特に文系にとってこれが難しい。（複数名挫折）**

- $\alpha^3 = \bar{\alpha}$ は複数の方法で解くことができる。
  - **理系数学の知識を用いる場合：**
    $|\alpha^3| = |\bar{\alpha}|$ より $|\alpha| = 1$ がいえるため，あとは偏角のみ考える。
  - **文系数学の範囲内でなんとかする場合 ①：**
    $\alpha^3 = \bar{\alpha}$ と $\bar{\alpha}^3 = \alpha$ より $\alpha^9 = \alpha$ がいえ，これを因数分解して解く
  - **文系数学の範囲内でなんとかする場合 ②：**
    $\alpha = p + qi\ (p, q \in \mathbb{R})$ とおいて代入する。
    一見大変そうだがこの方法でも解くことができる。
    土壇場ではこういうことができるように準備しておきたい。

③ 複素数の方程式 $\alpha^3 = \overline{\alpha}$ の解き方

(ii) $\alpha^3 = \overline{\alpha}$ のとき　であること

このとき $\alpha = A + Bi$ $(A, B \in \mathbb{R})$

$B \neq 0$

とすると　$\overline{\alpha} = A - Bi$

$A - Bi = (A + Bi)^3$

$= (A^3 - 3AB^2) + (3A^2B - B^3)i$

実部と虚部を比較すると

$$\boxed{\begin{cases} A = A^3 - 3AB^2 & \text{—①} \\ B = B^3 - 3A^2B & \text{—②} \end{cases}}$$

②において $B \neq 0$ より　$B^2 - 3A^2 = 1$

これを①に代入すると

$A = A^3 - 3A(3A^2 + 1)$

$8A^3 = -4A$

$A(2A^2 + 1) = 0$　必要条件

よって $A = 0$ $(\because A \in \mathbb{R})$

このとき $B = \pm 1$

よって $(\alpha, \overline{\alpha}) = (i, -i), (-i, i)$

②において $B \neq 0$ より　$B^2 - 3A^2 = 1$

これを①に代入すると

$A = A^3 - 3A(3A^2 + 1)$

$8A^3 = -4A$

$A(2A^2 + 1) = 0$　必要条件

よって $A = 0$ $(\because A \in \mathbb{R})$

このとき $B = \pm 1$

よって $(\alpha, \overline{\alpha}) = (i, -i), (-i, i)$

第 1 回の問題 (1B)

以下の命題 A, B それぞれに対し，その真偽を述べよ。また，真ならばその証明を与え，偽ならば反例を与えよ。

命題 A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26} + 100 \geqq n^2$ が成り立つ。

命題 B　整数 $n,\ m,\ l$ が $5n + 5m + 3l = 1$ をみたすならば，$10nm + 3ml + 3nl < 0$ が成り立つ。

1B 東京大学 2015年 文系 [1]

問題選択の意図

- 以下の理由により，論理的思考力を問えると考えた。
  - 命題の真偽を問う問題である。
  - 不等式や整数といった複数の条件が登場する。
- 以下の理由により，実戦的な問題解決力を問えると考えた。
  - 命題 A: いきなり 3 次関数の増減を調べるのではなく，まず反例の有無を調べることにより，時間短縮が可能である。
  - 命題 B: n, m, l が整数であるとき $n - 5n^2 + m - 5m^2$ がつねに正であることの説明が，方法によっては複雑になってしまう。

1B 解説

命題 A: 全称命題が偽であることの証明

- 命題 A は，すべての正整数 n について，与えられた不等式が成り立つかどうか考え，それを示すというものであった。
※受験以外の文脈では “任意の” という語が用いられる。

- 任意の正整数 n に対する不等式の成立を否定するには？
→ **正整数 m で，不等式が成り立たないものの存在をいえばよい。**

- そのような正整数 m の存在をいう最もシンプルな方法は？
→ 具体的に m を (1 つ) 与えればよい。
（なお，本問でそのような m は 1 つしか存在しない。）

命題 A: 全称命題が偽であることの証明

- 反例は $n = 17$ だが，これを見つけるためには（通常は）n を連続変数とみて増減を調べるといった作業が必要。

- しかし，**$n = 17$ という値を発見するまでのプロセスを答案に記載する必要はない。**

命題 A: 全称命題が偽であることの証明

〈命題A〉 nが正の整数のときの

$\frac{1}{26}(n^3-26n^2+2600) \geqq 0$ の真偽を調べる

xを実数として

$f(x)=x^3-26x^2+2600$ について考える

$f'(x)=3x^2-52x$

$=x(3x-52)$

より $f(x)$ の増減は下図のようになる

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{52}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって $f(x)$ の $x \geqq 0$ における最小値は $f(\frac{52}{3})$ となる

$17 \leqq \frac{52}{3} \leqq 18$ より

n^3-26n^2+2600 は $n=17$ または $n=18$ のときに最小となる。

不要

$n=17$ のとき

$17^3-26\cdot17^2+2600=-1<0$

よってこのとき

$\frac{1}{26}(n^3-26n^2+2600)<0$

となることから $\frac{n^3}{26}+100<n^2$ となる正の整数 n が存在する

よって命題Aは偽

（反例：$n=17$）

命題 A: 全称命題が偽であることの証明

命題Aは偽である。

$\frac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$ (nは正の整数)…(※)とおく。

$f(n)=\frac{n^3}{26}-n^2+100$ とすると、

$f(17)=\frac{17^3}{26}-17^2+100=-\frac{1}{26}<0$ となり、

(※)は成り立たない。

∴反例は $n=17$

命題Aについて、

$n=17$ のとき、

$\frac{17^3}{26}+100=\frac{4913}{26}+100=\frac{7513}{26}$

$17^2=289=\frac{7514}{26}$

∴ $\frac{17^3}{26}+100<17^2$

よって命題Aは偽

反例は、$n=17$

命題 A: 全称命題が偽であることの証明

- とはいえ，実際に問題を解くときは反例の有無がわからないわけだから，増減を調べるところから始まる。

- 限られた時間の中でなるべく効率よく (多くの時間を消費するリスクを抑えつつ) 問題を解くにはどうすればよいか？
  → **まず問題用紙の余白で計算して反例を探し，反例があればそれをすぐ答案にする。反例がないことが判明したら，または反例がなさそうであれば真であることを証明する。**

命題 B: 整数や不等式の条件の処理

- $5n + 5m + 3l = 1 \Leftrightarrow 3l = 1 - 5n - 5m$ を用いることで,
  $10nm + 3ml + 3nl = 10nm + (m + n) \cdot 3l = n - 5n^2 + m - 5m^2$
  と変形することができる。

- ここで n, m は整数だが, n, m はそれぞれ任意の整数値をとるわけではないということに注意。
  $\because$ n, m の値によっては l が整数でなくなってしまう。

命題 B: 整数や不等式の条件の処理

- $\boldsymbol{5n+5m+3l=1\ (n,m,l\in\mathbb{Z})}$ **を前提としたとき**，$n-5n^2+m-5m^2<0$ はつねに成立するか？という問題。
- $n-5n^2+m-5m^2$ という式において n,m は分離しているので，いったん $n-5n^2$ と $m-5m^2$ に分けて考える。
- **束縛条件はさておき**，n を整数とするとき，$n-5n^2$ はどういう値をとりうるか，2 次関数グラフをもとに考える。

命題 B: 整数や不等式の条件の処理

- $n-5n^2$ は $n=0$ のときに限り最大値 0 をとる。
  同様に，$m-5m^2$ は $m=0$ のときに限り最大値 0 をとる。

- したがって，$5n+5m+3l=1$ という束縛条件を無視すると，
  $n-5n^2+m-5m^2$ は $n=0$ かつ $m=0$ のときに限り
  最大値 0 をとる。（このとき以外は 0 より小さな値になる。）

- $n=0$ かつ $m=0$ となるケースがあるならばそれが反例になるが，
  このときは l が整数とならないため不適。
  → くだけた言い方をすると，**唯一反例となる可能性があった**
  ケースが不適だったので "全滅" → 命題は真となる。

命題 B: 整数や不等式の条件の処理

整数 n, m, l が $5n+5m+3l=1$

をみたすとき $3l=1-5n-5m$ より

$10nm+3ml+3nl$

$=10nm+(m+n)\cdot 3l$

$=10nm+(m+n)(1-5m-5n)$

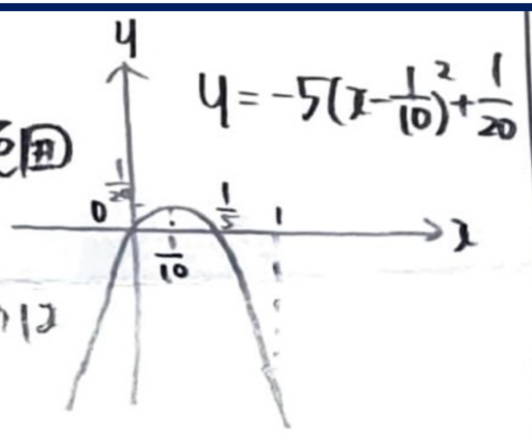
$=-5m^2+m-5n^2+n$ より

$10nm+3ml+3nl=-5m^2+m-5n^2+n$

と表される …①

ここで $y=-5x^2+x$ のグラフを考えると

グラフは右図となる



図より x も整数の範囲で考えたとき、最も

y 座標が大きくなるのは

$x=0$ のときであり

このとき $y=0$. m, n は①において

独立に動くので $m=n=0$ をとりうる.

このとき①より

$10nm+3ml+3nl=0$

となり $l=\frac{1}{3}$ となる.

このときだけ

①$=0$

となる

#	課題内容
第１回	~~集合と論理，式と証明~~
第２回	二次関数
第３回	三角比，三角関数
第４回	指数関数・対数関数
第５回	場合の数，確率
第６回	整数，数列
第７回	整式の微積分
第８回	図形の性質，図形と方程式，ベクトル

次回は "二次関数"

a を正の実数とする。次の 2 つの不等式を同時にみたす点 (x, y) 全体からなる領域を D とする。

$$y \geqq x^2$$
$$y \leqq -2x^2 + 3ax + 6a^2$$

領域 D における $x + y$ の最大値, 最小値を求めよ。

2A 東京大学 2004年 文系 [2]

次回は “二次関数”

実数 $a,\, b$ に対し, 関数 $f(x)$ を次のように与える。

$$f(x) = \cos 2x + 4a\cos x + b$$

すべての x に対して不等式 $-6 \leqq f(x) \leqq 6$ が成立するような点 $(a,\, b)$ の範囲を図示せよ。

2B 京都大学 1993年 文系 [1]

日頃の学習で意識すべきこと

- 普段の問題演習においても，途中過程は丁寧に記述しましょう。
  - そもそも，記述を丁寧に行った方が，問題を解きやすいです。
  - 不正解だったときに，自分がどこで躓いているのかをすみやかに把握できます。
  - 普段できないことは，試験本番で突然できるようにはなりません。

- 問題が解けた，または解けたと自分で認識しているとしても，
  その問題の解説はなるべく読むようにしましょう。

- 自身の答案を見てもらう機会を，なるべく多く設けましょう。

今回もご視聴
ありがとうございました！

次の課題も頑張りましょう！

#問題の解き方と答案のつくり方