Série 2 — 2bac SX

Prof: ZAKARIA Bouicha

EX1

EXERCICE 29

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\dfrac{z-4}{z}=i$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2z+4=0$, puis écrire les solutions sous forme trigonométriques.

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$a=2\ ,\ b=1-i\sqrt{3}\ ,\ c=1+i\sqrt{3}\ \text{ et } d=2+2i.$$

a) Quelle est la nature du quadrilatère $OBAC$?

b) Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre A et de rayon 2.

Soit $(\mathscr{C}')$ le cercle de centre $A'(2i)$ et de rayon 2.

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Déterminer l'affixe b' du point $B'=r(B)$ puis vérifier que : $B'\in(\mathscr{C}')$.

c) Vérifier que : $b-d=\left(2+\sqrt{3}\right)(b'-d)$.

En déduire que les points B, B' et D sont alignés.

EX2

EXERCICE 30

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a=\sqrt{3}+i$, $b=\sqrt{3}-i$ et $c=2i$

a) Écrire les nombres complexes a, b et c sous forme exponentielle.

b) Vérifier que : $\dfrac{c}{a}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ puis en déduire la nature du triangle OAC.

c) Montrer que le triangle OAB est équilatéral et en déduire la nature du quadrilatère $OBAC$.

3) Montrer que l'expression complexe de la rotation r de centre O et qui transforme C en A s'écrit :

$$z'=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$ puis vérifier que : $r(A)=B$.

4) Soit D l'image du point B par la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

a) Vérifier que l'affixe du point D est : $d=2\sqrt{3}$.

b) Montrer que le triangle BCD est rectangle en B.

Ex3

EXERCICE 31

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2z+2=0$, puis écrire les solutions sous forme trigonométriques.

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$a=1-i$, $b=1+i$, $c=1+\sqrt{3}$ et $d=1+\sqrt{3}+2i$

a) Montrer que : $\dfrac{b-c}{b-a}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

c) Vérifier que D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3) Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

a) Montrer que l'expression complexe de r est :

$$z'=\frac{\sqrt{2}}{2}az$$

b) Soit P le point d'affixe $p=1+\sqrt{2}+i$ et $P'=r(P)$.

Vérifier que $\overline{p}$ est l'affixe du point P' puis en déduire $\arg(p)$.

c) Déterminer la nature du triangle OPP'.

Ex4

EXERCICE 35

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$(E): \frac{1}{2}z^3-(1+i)z^2+2(1+i)z-4i=0$$

1) a) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 à déterminer.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\dfrac{1}{2}z^2-z+2=0$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$, on considère les points :

$$A(1+i\sqrt{3}) \quad ; \quad B(1-i\sqrt{3}) \quad ; \quad C(2i)$$

a) Montrer que : $OA=OB$.

b) Soit D le milieu du segment $[AC]$.

Déterminer l'affixe du point D et une mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{e}_1;\overrightarrow{OD}}\right)$.

c) En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Ex5

EXERCICE 36

Première Partie :

Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on pose :

$$P(z)=z^3-2(\sqrt{3}+i)z^2+4(1+i\sqrt{3})-8i$$

1) Montrer que l'équation $P(z)$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

2) a) Vérifier que pour tout $z_0\in\mathbb{C}$:

$$P(z)=(z-z_0)(z^2-2\sqrt{3}z+4)$$

b) Déterminer les complexes z_1 et z_2 solutions de l'équation : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ avec $\mathrm{Im}(z_2)<0$.

Deuxième Partie :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$, $b=\sqrt{3}-i$, $c=\sqrt{3}+i$ et $d=2i$.

1) Montrer que le triangle OBC est équilatéral et que le point A est le milieu du segment $[OC]$.

2) Déterminer un argument du complexe $\dfrac{d-a}{c-a}$.

3) Montrer que la droite (BD) est la médiatrice du segment $[OC]$.

4) Déterminer la nature du quadrilatère $OBCD$.

Ex6

EXERCICE 39

1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$$

a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $P(z) = (z-4)(az^2 + bz + c)$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 4 \ , \ b = 1 + i\sqrt{3} \ \text{ et } c = \overline{b}.$$

a) Construire les points A, B et C.

b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3) Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$.

Soit G l'image du point K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$ et F l'image du point K par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer l'affixe du point G.

b) Écrire l'affixe du point F sous forme exponentielle.

c) Montrer que : $(OC) \perp (OF)$.

Ex7

EXERCICE 42

Première Partie :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^2 - 4z + 5 = 0$

1) Déterminer z_1 et z_2 solutions de l'équation (E) telles que : $\operatorname{Im}(z_1) > 0$.

2) Écrire $z_1 - 1$ et $z_2 - 1$ sous forme exponentielle.

3) Vérifier que : $(z_1 - 1)^{16} + (z_2 - 1)^{16} = 29$

Deuxième Partie :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$, on considère les points A, B et Ω d'affixes respectives : $z_A = 2 - i$, $z_B = 2 + i$ et $z_\Omega = 1$.

1) a) Vérifier que : $\dfrac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

b) En déduire la nature du triangle ΩAB.

2) Soit r la rotation de centre Ω et qui transforme A en B.

a) Déterminer l'angle de a rotation r.

b) Donner l'expression complexe de la rotation r.

c) Déterminer l'affixe du point B' image de B par r.