



Exercice(1) structure

I) on considère dans l'anneau unitaire $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- 1) Calculer A^2 et montrer que $A^2 = 4A - 3I$ (on rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel)
- 2) Déduire que A admet dans un inverse que l'on déterminera

II) on définit sur $\mathbb{R}$ la loi interne T définie par : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad xTy = x + y - 2016$

- 1) a) montrer que T est commutative, associative dans $\mathbb{R}$

b) montrer que $(\mathbb{R}, T)$ est un groupe commutatif

- 2) soit $\perp$ la loi définie sur $\mathbb{R}$ par $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad x \perp y = x + y - \frac{1}{2016}xy$

et on considère l'application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2016(1 - x)$

- a) montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, \times)$ vers $(\mathbb{R}, \perp)$

- b) déduire que $(\mathbb{R}, T, \perp)$ est un corps commutatif

Exercice(2) complexe

- 1) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) \quad 2Z^2 - 1 + i\sqrt{3} = 0$ (on note a la solution telle que $\operatorname{Re}(a) > 0$)

- 2) a) déterminer le module et un argument du nombre $1 + a$

b) vérifier que $(1 - a)(1 + a) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ puis déduire la forme trigonométrique du nombre $1 - a$

- 3) Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B, M, M', N d'affixes respectivement $a, -a, z, z', \bar{z}$

et on suppose que $2zz' - 1 + i\sqrt{3} = 0$ et $|z| = 1$

- a) montrer que $\left(\overline{OM'}, \overline{ON}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ et $z' - a = (-1 + i\sqrt{3}) \frac{z - a}{2az}$

- b) montrer que si $(z + a)(z' + a) \neq 0$ alors $\frac{z' - a}{z' + a} = -\frac{z - a}{z + a}$

- c) on suppose A, B, M non alignés montrer que A, B, M, M' sont cocycliques

Exercice(3) arithmétique

- (I) 1) résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $(E) \quad 7x - 6y = 1$

2) on pose $N = \overbrace{11 \dots 1}^{(7)}_{2016 \text{ fois}}$

- a) montrer que $(7^{2015}, N)$ est une solution de (E)



b) déduire que $2017 \mid N$ (on donne 2017 est un nombre premier)

(II) On considère dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'équation $(F) \quad 7^n - 3 \times 2^m = 1$

1) on suppose $m \geq 5$. soit $(n; m)$ ne solution de (F)

a) montrer $7^n \equiv 1 \pmod{32}$

b) déterminer suivant p le reste de la division euclidienne du nombre 7^p par 32

c) déduire que $7^n \equiv 1 \pmod{5}$

2) déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (F)

Exercice(4) fonction

Soit p un entier naturel non nul. on considère la fonction f_p telle que $f_p(x) = 1 + \ln(x + p)$

et on pose $h_p(x) = x - f_p(x)$

Parti(1)

1) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f_1(x)$

2) étudier la branche infinie de la courbe (C_{f_1}) au voisinage de $+\infty$

3) étudier le sens de variation de la fonction f_1 et donner le tableau de variation de f_1

4) donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_{f_1}) au point $a = 1$ puis tracer (C_{f_1}) et (T)

Parti(2)

1) montrer que l'équation $f_p(x) = x$ admet dans $]0, +\infty[$ une solution α_p

2) déterminer le signe de $h_{p+1}(\alpha_p)$ et déduire que la suite $(\alpha_p)_p$ est croissante

3) montrer que $\alpha_p \geq 1 + \ln p$ et déduire $\lim_{p \rightarrow +\infty} \alpha_p$

Parti(3)

Soit $(U_n)_n$ la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f_1(U_n)$

1) montrer que $1 < \alpha_1 < 3$

2) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq U_n < 3$

b) en utilisant le théorème des accroissements finis montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad |U_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha_1|$

c) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad |U_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$



Exercice(5) intégral

Soit f la fonction numérique définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(-1) = e^{-1} \ln 2$ et $f(x) = \int_x^{2x+1} \frac{e^t}{t+1} dt$; $x > -1$

1) montrer que $(\forall x > -1) \int_x^{2x+1} \frac{1}{t+1} dt = \ln 2$

2) a) montrer que $(\forall x > -1) e^x \ln 2 \leq f(x) \leq e^{2x+1} \ln 2$

b) déduire que f est continue à droite de $a = -1$

3) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation du résultat

4) a) montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a $(\forall x > -1) f'(x) = \frac{e^x (e^{x+1} - 1)}{x+1}$

b) étudier le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f

5) a) montrer que $(\forall x > -1) e^{-1} \leq \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \leq e^{2x+1}$

(utiliser deux fois le théorème des accroissements finis)

b) déduire que f est dérivable à droite de $a = -1$ en déterminant le nombre $f'_d(-1)$

6) tracer la courbe (C_f)