Chapter 5. 고유값과 고유벡터

5.1 고유값과 고유벡터

(1) 고유값과 고유벡터

행렬 A가 $n \times n$ 정방행렬일 때, R^n에 속하는 $\bar{0}$가 아닌 $\bar{x}$에 대하여 $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$를 만족하는 스칼라 λ를 고유값(Eigen value)라 하고 각각의 λ에 대응하는 벡터 $\bar{x}$를 고유벡터(Eigen vector)라고 합니다. 그리고 방정식 $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$를 고유값 문제라고 합니다

고유값과 고유벡터는 고유값문제에서 얻을 수 있습니다

고유값문제 $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$에서 우변을 좌변으로 이항하면 $(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$가 됩니다

$(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$ 의 해는 직관적으로 $\bar{x} = \bar{0}$ 또는 $A - \lambda I = 0$ 이 됩니다. 이들을 자명해(trivial solution)이라고 합니다.

그러나 이미 "R^n에 속하는 $\bar{0}$가 아닌 $\bar{x}$에 대하여"라는 가정이 있으므로 $\bar{x} \neq \bar{0}$이고 $A = \lambda I$가 되어 A가 단위행렬 형태가 되어 일반적은 행렬 A에 대해서는 성립하지 않습니다

따라서 고유값문제가 자명해를 가지지 않을 조건은 $(A - \lambda I)^{-1}$가 존재하지 않아야 합니다.

$(A - \lambda I)^{-1}$가 존재하지 않는다는 것은 행렬식 $|A - \lambda I| = 0$이 되어야 하며 여기서 고유값 λ를 구할 수 있으며 이를 고유값문제에 대입하여 각 고유값에 대한 고유벡터 $\bar{x}$를 구할 수 있습니다

$ex)$ $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 2/3 & 0 \\ 5 & -8 & -1/4 \end{bmatrix}$ 의 고육값과 고유벡터를 구하시오

Chapter 5. 고유값과 고유벡터

(2) 고유공간과 고유벡터

고유값 문제 $(A-\lambda I)\bar{x}=\bar{0}$ 를 만족하는 해공간 $\bar{x}$ 를 고유공간이라고 하고 그 기저를 고유벡라고 합니다. 따라서 고유벡터는 아래의 2가지 의미가 있습니다

① $A-\lambda I$의 영공간의 기저

② 고유값 문제를 만족하는 해 $\bar{x}$

$ex)$ $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$의 고유공간 및 고유벡터를 구하시오

(3) 고유값과 가역성

① 정방행렬 A가 가역이면 $\lambda=0$이 행렬 A의 고유값이 아닙니다

② $\lambda=0$이 행렬 A의 고유값이 아니면 정방행렬 A가 가역입니다

가 모두 성립하기 때문에

정방행렬 A가 가역이기위한 필요충분조건은 $\lambda=0$이 행렬 A의 고유값이 아니어야 합니다