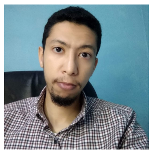
DEVOIR 1 2BSM	Pr Zakaria Bouicha	2-BAC SM
Les limites et la continuité 2BACSM	Page facebook	
	Chaine Youtube	
	Whatsapp : 0617074062	
	plateforme	

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^3 + nx - 1$

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique x_n dans l'intervalle $]0;1[$.

2) a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n < \frac{1}{n}$. Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{4}|u_n - u_{n-1}|$

4) On considère les suites (α_n) et (β_n) définies par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \alpha_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad \beta_n = u_{2n+1}$$

a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \beta_n = 1 + \frac{1}{1+\alpha_n}$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \alpha_n \leq \beta_n$

c) Montrer que la suite (α_n) est croissante et la

d) Monter que les suites (α_n) et (β_n) convergent

et vers la même limite.

5) a) Monter que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{4}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

c) Déterminer un entier naturel N à partir duquel :

$$(\forall n \geq N) \quad \left|u_n - \sqrt{2}\right| < 10^{-2}$$

Exercice 3

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1-2u_n^2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

où a est un réel de l'intervalle $\left]0;\frac{1}{4}\right[$.

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n < \frac{1}{4}$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) Soit (S_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = S_{2n}$ et $w_n = S_{2n+1}$

a) Montrer que les suites numériques (v_n) et (w_n) sont adjacentes. On note ℓ la limite commune de ces deux suites.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} \leq \frac{2}{7}u_n$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|S_n - v_n| \leq a\sum_{k=n+1}^{k=2n}\left(\frac{2}{7}\right)^k$$

d) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ell$

(Remarquer que : $|S_n - \ell| \leq |S_n - v_n| + |v_n - \ell|$)

Examen Normalisé Sc. Maths 1998

Exercice 4

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{(n+1)^2}} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $v_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $u_n = \sqrt{1 + v_n}$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq \sqrt{3}$

et que (u_n) est convergente.

4) a) Montrer par récurrence que pour tout entier

$k \geq 3$: $\quad 2^{k+1} \geq (k+1)^2$

b) En déduire que : $(\forall k \geq 3)$, $u_{k+1}^2 - u_k^2 \geq \frac{1}{2^{k+1}}$

c) En déduire que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie

les inégalités : $\sqrt{\frac{179}{72}} \leq \ell \leq \sqrt{3}$

Exercice 5

Le but de ce problème est l'étude de quelques exemples de suites adjacentes.

Les parties A, B, C et D sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

Partie A : étude de suites adjacentes et détermination de leur limite commune

On pose pour tout entier $n \geq 2$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 - 1} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

1) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. Que peut-on en conclure ?

2) En remarquant que pour tout $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$$

donner une expression simplifiée de u_n.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie B : étude de suites adjacentes et caractérisation de la limite d'une suite

Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \ldots.. + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

On note pour tout entier $n \geq 1$: $a_n = S_{2n}$ et $b_n = S_{2n+1}$

1) Montrer que les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

2) Conclure sur la nature de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

<u>Partie C</u> : **étude de suites croisées**

On se propose d'étudier les deux suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = a$, $y_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{px_n + qy_n}{p+q} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{qx_n + py_n}{p+q}$$

Où a, b, p, q sont des réels strictement positifs tels que $0 < a < b$ et $0 < q < p$

1) a) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n - y_n$ et $x_n + y_n$, et en déduire une expression de x_n et y_n en fonction de a, b, p, q et n.

b) Déduire du 1)a) que les suites (x_n) et (y_n) convergent vers une limite commune $\ell = \dfrac{a+b}{2}$

2) Retrouver le résultat du 1)b) en établissant que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

Exercice 6

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } u_1 = 1 \text{ et } \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n}\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1) Calculer u_2 et u_3.

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{4u_n - 1}$

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad \dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

4) On considère les suites (a_n) et (b_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$

a) On pose pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$: $f(x) = \dfrac{2x}{-1+4x}$

Montrer que $f\left(\left[\dfrac{1}{2};1\right]\right) \subset \left[\dfrac{1}{2};1\right]$

b) Montrer par récurrence que la suite (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante.

c) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent et déterminer la limite de chacune d'elles.

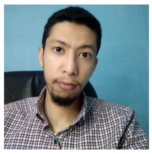
5) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{4}{3}$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

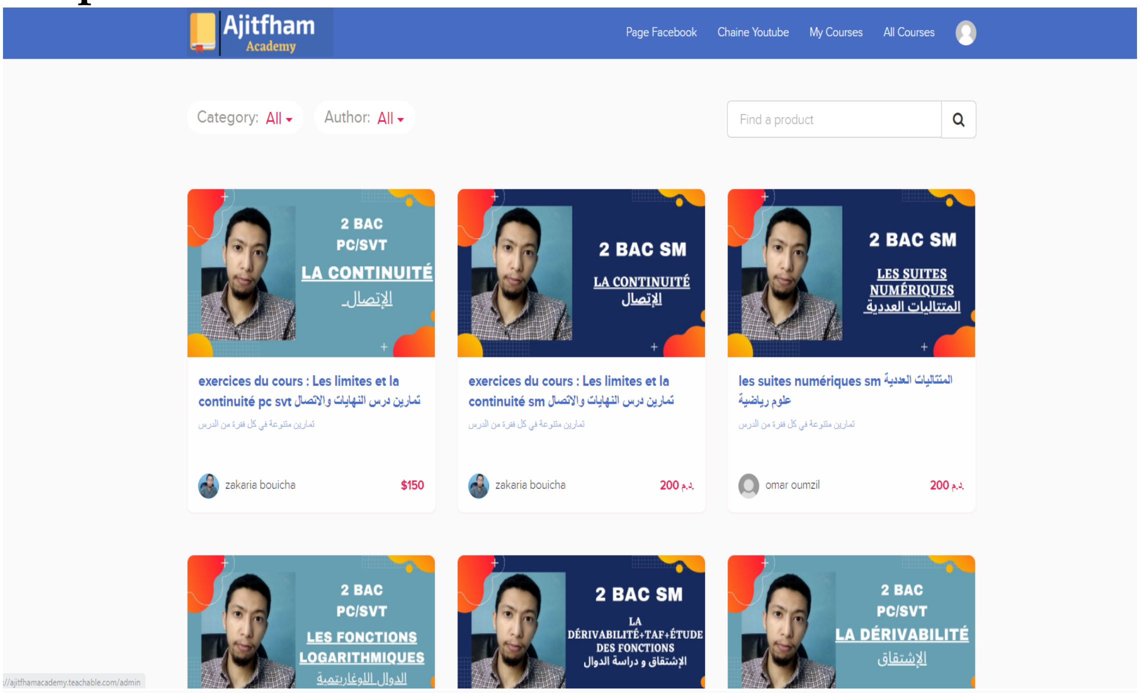
b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n. Préciser $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

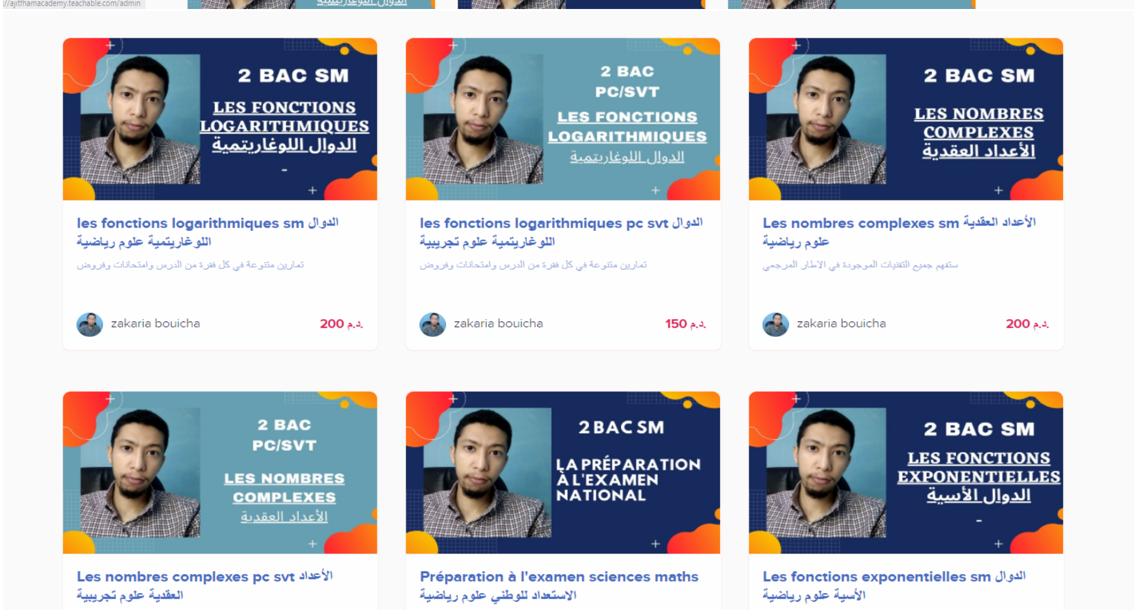
Examen Normalisé Sc. Maths 1997

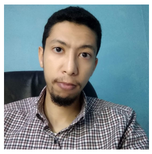
<table>
<tr><td>DEVOIR 1 2BSM</td><td>Pr Zakaria Bouicha</td><td>2-BAC SM</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Les limites et la continuité

2BACSM</td><td>Page facebook</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>Chaine Youtube</td></tr>
<tr><td>Whatsapp : 0617074062</td></tr>
<tr><td>plateforme</td></tr>
</table>

Pour s'inscrire dans la plateforme et avoir la correction sous forme de videos il suffit de contacter 0617074062 sur wtsp





DEVOIR 1 2BSM	Pr Zakaria Bouicha	2-BAC SM
Les limites et la continuité	Page facebook	
	Chaine Youtube	
2BACSM	Whatsapp : 0617074062	
	plateforme