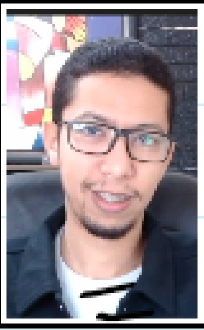

ZAKARIA
Bouicha
WtSp: 0617074062

Arithmétiques dans $\mathbb{Z}$

2 Bac SM (Série 2)

Ex 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $d = (n^2+1) \wedge (n+1)$

1) a) Déterminer le nombre d suivant la parité de n.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre n^2+1 n'est pas un carré parfait.

2) Soit a, b et n sont des entiers naturels non nuls et tels que : $a \wedge b = 1$ et $a(n^2+1) = b^2(n+1)$

a) Montrer que : $a \wedge b^2 = 1$ et $a \leq n$ et $b \leq n$.

b) Montrer que : $(n^2+1) \wedge (n+1) = 2$

c) On pose : $n^2+1 = 2p$ et $n+1 = 2q$

avec : $(p;q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$

Montrer que : $a = q$ et $b^2 = p$

d) On pose : $b = a+1$.

Calculer a, b et n.

Ex 2 :

1) Montrer que 163 est un nombre premier.

2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) suivante :

$$(E) : 13x - 162y = 1$$

a) Déterminer une solution particulière de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

3) On considère dans $\mathbb{Z}$ le système (S) suivant :

$$(S) : \begin{cases} x \equiv a\,[13] \\ x \equiv b\,[162] \end{cases} \quad \text{où } (a;b) \in \mathbb{Z}^2$$

a) Vérifier que le nombre $x_0 = 325b - 324a$ est une solution du système (S).

b) Montrer que : $(S) \Leftrightarrow x \equiv x_0\,[2106]$

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S) dans le cas où $a = 2$ et $b = 3$.

4) Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que : $x^{25} \equiv 3\,[163]$

a) Montrer que : $x \wedge 163 = 1$ puis que $x \equiv 3^{13}\,[163]$.

b) En déduire que : $x^{25} \equiv 3\,[163] \Leftrightarrow x \equiv 3^{13}\,[163]$

Ex 3

Partie D :

Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1) Montrer que m^2 et $m-1$ sont premiers entre eux.

2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante :

$$(E_m) : m^2x + (m-1)y = 1$$

Montrer que l'ensemble des solutions de (E_m) est :

$$S_m = \{(km - k + 1; -km^2 - m - 1) / k \in \mathbb{Z}\}$$

3) Dans cette question, on pose : $m = 7$.

a) Vérifier que le couple $(49; -400)$ est une solution de l'équation (E_7).

b) Montrer que 401 est un nombre premier.

c) En déduire en utilisant le théorème de Fermat que : $2011^{49^2} \equiv 2011\,[401]$

Ex 4

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 9$. On considère les nombres :

$$a = \overline{1680}_{(n)} \quad \text{et} \quad b = \overline{252}_{(n)}$$

1) Montrer que : $n+2 / b$ et $n+2 / a$

2) On pose : $\alpha = \overline{21}_{(n)}$ et $\beta = \overline{14}_{(n)}$ et $d = \alpha \wedge \beta$

a) Montrer que d divise 7.

b) Montrer que : $7 / (n-3) \Rightarrow (7 / \alpha$ et $7 / \beta)$

3) Montrer que : $(2n+1) \wedge n = 1$

4) Déterminer $a \wedge b$ selon les valeurs de l'entier n.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on pose :

$$A = 21n^2 - 17n - 4 \quad \text{et} \quad B = 28n^3 - 8n^2 - 17n -$$

a) Montrer que A et B sont divisible par $n-1$.

b) Déterminer selon les valeurs de n, le plus grand commun diviseur des entiers A et B.

Examen National 2004 (Session De Rattrapage

Ex 5

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

1) Montrer que : $a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge [b(a+b)] = 1$

2) On considère dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation (E) suivante :

$$(E) : x^2 + y^2 + xy - 31x = 0$$

Soit $(x;y)$ une solution de (E) et on pose : $d = x \wedge y$.

a) Montrer qu'il existe un couple $(a;b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $a(31 - da) = bd(a+b)$

b) En déduire que a divise d.

3) a) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$c(a^2 + b^2 + ab) = 31$$

b) En déduire que $c = 1$.

4) En déduire les solutions de l'équation (E).

Ex6

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = \underbrace{333...3}_{n \text{ fois}}1$

1) Vérifier que les entiers a_1 et a_2 sont premiers.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$.

3) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $10^{30k+2} \equiv 7\ [31]$

4) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $3a_{30k+1} \equiv 0\ [31]$, puis en déduire que 31 divise a_{30k+1}.

5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n \equiv 1\ [30]$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solutions dans l'ensemble $\mathbb{Z}^2$.

Examen National 2014 (Session Normale)

Ex7

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E) : 3x - 2y = 1$

2) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que le couple $(14n+3; 21n+4)$ est solution de l'équation (E).

b) En déduire que les nombres $14n+3$ et $21n+4$ sont premiers entre eux.

3) Soit $d = (2n+1) \wedge (21n+4)$.

a) Montrer que $d = 1$ ou $d = 13$.

b) Montrer que : $d = 13 \Leftrightarrow n = 6\ [13]$

Ex8

1) Déterminer les entiers naturels m tels que :

$$m^2 + 1 \equiv 0\ [5]$$

2) Soit p un nombre premier tel que :

$$p = 3 + 4k \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{N}$$

et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n^2 + 1 \equiv 0\ [p]$

a) Vérifier que : $(n^2)^{1+2k} \equiv -1\ [p]$

b) Montrer que n et p sont premiers entre eux.

c) En déduire que : $(n^2)^{1+2k} \equiv 1\ [p]$

d) En déduire de ce qui précède qu'il n'existe aucun entier naturel vérifiant : $n^2 + 1 \equiv 0\ [5]$

Examen National 2010 (Session Normale)

Ex9

Soit x un entier naturel vérifiant : $10^x \equiv 2\ [19]$

1) a) Vérifier que : $10^{x+1} \equiv 1\ [19]$

b) Montrer que : $10^{18} \equiv 1\ [19]$

2) Soit d le plus grand commun diviseur de $x+1$ et 18.

a) Montrer que : $10^d \equiv 1\ [19]$.

b) Montrer que : $d = 18$.

c) En déduire que : $x \equiv 17\ [18]$.

Examen National 2011 (Session De Rattrapage)