6　問題篇

6.1　第 1 回：集合と論理, 式と証明

問題 1A (京都大学 2016 年 文系 第 5 問)

実数を係数とする 3 次式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対し, 次の条件を考える。

(イ) 方程式 $f(x)=0$ の解であるすべての複素数 α に対し, α^3 もまた $f(x)=0$ の解である。

(ロ) 方程式 $f(x)=0$ は虚数解を少なくとも 1 つもつ。

この 2 つの条件 (イ), (ロ) を同時に満たす 3 次式をすべて求めよ。

問題 1A のポイント

実数や複素数の性質についての理解を問われる問題。実数係数の多項式 $g(x)$ と複素数 β について, 一般に $g(\overline{\beta}) = \overline{g(\beta)}$ が成り立つ。したがって, ある複素数 β が方程式 $g(x) = 0$ の解ならば, それと共役な複素数 $\overline{\beta}$ も $g(x) = 0$ の解である。

本問においては, 虚数解の存在がわかっているため, それと共役 (であり異なる) 虚数解の存在もいえ, $f(x)$ が 3 次であることもあわせると $f(x) = 0$ の 3 解が $\alpha, \overline{\alpha}, t$ (α は虚数, t は実数) と書けることがいえる。それに気づくのが, この問題を解く第一歩だ。

次に意識すべきは 条件 (イ) である。ある複素数 α が方程式 $f(x) = 0$ の解ならば, それを 3 乗した複素数 α^3 も解であると述べられているが, これの解釈を誤った答案が目立った。すなわち, 条件 (イ) は, あくまで "$\alpha^3, \overline{\alpha}^3, t^3$ はいずれも $f(x) = 0$ の解である" と述べているのであって, "$f(x) = 0$ の 3 解は $\alpha^3, \overline{\alpha}^3, t^3$ である" と述べているのではない。裏を返せば, $\alpha^3, \overline{\alpha}^3, t^3$ の中には重複しているものがあってもよいし, すべて同じ値であってもよいのである。(実際, 本問の解答の中にはそのようなケースがある。)

したがって本問では, $\alpha^3, \overline{\alpha}^3, t^3$ の各々が $\alpha, \overline{\alpha}, t$ のどれに対応しているかで場合分けをすることとなる。これが一番の難所といってもよいだろう。ただし, $3^3 = 27$ 通りのすべてを調べなければいけないわけではない。$t \in \mathbb{R}$ より $t^3 \in \mathbb{R}$ だから $t^3 = t$ がいえるし, $\alpha^3 = \alpha$ とすると $\alpha = 0, 1, -1$ という実数になってしまうため $\alpha^3 \neq \alpha$ となる。さらに $\overline{\alpha}^3$ がどの解に対応しているかは, α^3 の対応を決めれば自動的に定まる。よって, 調べるべき場合の数は高々 $3 \times 2 = 6$ 通りであり, これを理解していれば思いの外スッキリした答案になるはずだ。

問題 1A 解答例

$f(x)$ は実数係数の 3 次多項式であるため, ある虚数 α が方程式 $f(x)=0$ の解ならばそれと共役な虚数 $\overline{\alpha}$ もこの方程式の解であることがいえる。またこの方程式は少なくとも 1 つの実数解をもつ。それらと条件 (ロ) より, 方程式 $f(x)=0$ の 3 つの解は, ある虚数 α と実数 t を用いて $\alpha, \overline{\alpha}, t$ と書ける。[7]

条件 (イ) より t^3 は $\alpha, \overline{\alpha}, t$ のいずれかと等しいが, $t \in \mathbb{R}$ より $t^3 \in \mathbb{R}$ であり, したがって $t^3 = t$ に限られる。これを解くことで $t = 0, 1, -1$ のいずれかとわかる。同じく条件 (イ) より, α^3 は $\alpha, \overline{\alpha}, t$ のいずれかと一致するが, $\alpha^3 = \alpha$ とすると t 同様に $\alpha = 0, 1, -1$ という実数に限定されるの不適。よって α^3 は $\overline{\alpha}, t$ のいずれかと一致することがいえ, 以下これをもとに場合分けする。(これを決めれば, $\overline{\alpha}^3$ が α, t のどちらに対応するかは自動的に決まる。)

(i) $\boldsymbol{\alpha^3 = \overline{\alpha}}$ のとき

$\alpha = p + qi\,(p,\, q \in \mathbb{R},\, q \neq 0)$ とすると, $\alpha^3 = (p^3 - 3pq^2) + (3p^2q - q^3)i$, $\overline{\alpha} = p - qi$ より

$$\begin{cases} p^3 - 3pq^2 = p \\ 3p^2q - q^3 = -q \end{cases}$$

がいえる。$q \neq 0$ なので第 2 式から $3p^2 - q^2 = -1 \Leftrightarrow q^2 = 3p^2 + 1$ がいえ, これを第 1 式に代入することで $2p^3 + p = 0 \Leftrightarrow p = 0$ がしたがう ($\because p \in \mathbb{R}$)。また $p = 0$ より $q = \pm 1$ となり, $\alpha = \pm i$ が得られる[8]。これら 2 つがまさに α と $\overline{\alpha}$ であるから, $t = 0, 1, -1$ と併せて

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-0)(x-i)(x+i) = x(x^2+1) = \underline{x^3 + x} \\ f(x) &= (x-1)(x-i)(x+i) = (x-1)(x^2+1) = \underline{x^3 - x^2 + x - 1} \\ f(x) &= (x+1)(x-i)(x+i) = (x+1)(x^2+1) = \underline{x^3 + x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

を得る。[9]

(ii) $\boldsymbol{\alpha^3 = t}$ のとき

$t = 0$ とすると $\alpha = 0 \in \mathbb{R}$ となり不適。

$t = 1$ のときを考えると, $\alpha, \overline{\alpha}, t$ は 3 乗するとすべて 1 となるため, それら 3 つの複素数は 3 次方程式 $x^3 = 1$ をみたす。逆に $x^3 = 1$ は 1 つの実数解と 2 つの互いに共役な虚数を解にもつため, $f(x) = \underline{x^3 - 1}$ が得られる。

$t = -1$ についても同様に考え, $\alpha, \overline{\alpha}, t$ が 3 乗するとすべて -1 となることから $f(x) = \underline{x^3 + 1}$ が得られる。

以上より, 条件をみたす 3 次の実数係数多項式 $f(x)$ は

$$f(x) = \underline{\boldsymbol{x^3 + x,\quad x^3 - x^2 + x - 1,\quad x^3 + x^2 + x + 1,\quad x^3 - 1,\quad x^3 + 1}}$$

の 5 つである。

---

[7] α と $\overline{\alpha}$ の対称性より, 特に虚部が正のものを α としてもよい。

[8] このように, 実部と虚部を文字でおいても, 思いの外容易に α を求められる。なお, 理系受験生や意欲のある文系受験生で, 複素数平面や複素数の偏角を学習した人は, α を (r, θ) と極座標表示して $\alpha^3 = \overline{\alpha}$ を解く方法も試してみてほしい。

[9] t を $0, 1, -1$ から選んでおり, α についても $q \neq 0$ とさきの連立不等式をみたすものとして導いているうえ, $\overline{\alpha}^3$ が $\alpha, \overline{\alpha}, t$ のいずれと等しいかについては α^3 から自動的に定まるため, 逆の確認 (十分性の確認) は不要である。

赤字：内容面のコメント　青字：表現面のコメント

答案添削講座（東大・京大レベル）解答用紙	問題番号	1A 2016 京大文5	解答例

$f(x)$が実数係数であることと(ロ)より、方程式 $f(x)=0$ の3解は
ある$t\in\mathbb{R}$と虚数αを用いて $t, \alpha, \bar{\alpha}$ と書ける。($\mathrm{Re}(\alpha)>0$ とする。)

共役な虚数1ペアなので限定してよい(しなくてもよい)

便利です。

(イ)より $f(t^3)=0$ だが、$t^3\in\mathbb{R}$ より $t=t^3$ がいえ、これより
tの値は $t=0, 1, -1$ のいずれかに絞られる。
また(ロ)より $\alpha^3\in\{t, \alpha, \bar{\alpha}\}$ であり、これをもとに場合分けする。

場合分けの基準を明記すると自分も採点者も分かりやすいかも。

(i) $\alpha^3=\bar{\alpha}$ のとき ($\bar{\alpha}^3=\alpha$も左式よりしたがう)
$\alpha=p+qi$ ($q\in\mathbb{R}, q>0$)とする。$\alpha^3=(p^3-3pq^2)+(3p^2q-q^3)i$ であるため

$$\alpha^3=\bar{\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} p^3-3pq^2=p \\ 3p^2q-q^3=-q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(p^2-3q^2-1)=0 \\ q(q^2-3p^2-1)=0 \end{cases}$$

となる。$q\neq 0$ なので
第2式より $q^2-3p^2-1=0$ つまり $q^2=3p^2+1$ であり、これを第1式に代入すると
$p=0$ が得られる。これより $q=1$ となるため、

- $t=0$ のとき $f(x)=(x-0)(x-i)(x+i)=x^3+x$
- $t=1$ 〃 $f(x)=(x-1)(x-i)(x+i)=x^3-x^2+x-1$
- $t=-1$ 〃 $f(x)=(x+1)(x-i)(x+i)=x^3+x^2+x+1$

何と何が並列になっているのかを整理。

{〜① 〜② のように式番号をふるとより記述がスッキリするかも。

(ii) $\alpha^3=t$ のとき

- $t=0$ とすると $\alpha=0(\in\mathbb{R})$ となり(ロ)に反する。

単に"不適"でもOKだが、この方が明確ではある。

- $t=1$ のとき $(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$ より $\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

　このうち $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ が条件をみたし、$1, \alpha, \bar{\alpha}$ はいずれも
　3乗すると1になるため、$f(x)=x^3-1$ である。

$(x-1)(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$を計算するのももちろんOKです。

- $t=-1$ のとき $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ が条件をみたし、$1, \alpha, \bar{\alpha}$ はいずれも
　3乗すると-1になるため、$f(x)=x^3+1$ である。

(iii) $\alpha^3=\alpha$ のとき
$\alpha=0, 1, -1$ ($\in\mathbb{R}$)となり、いずれも(ロ)に反する。

以上より
$$\boxed{\begin{aligned} f(x)=\ &x^3+x, \\ &x^3-x^2+x-1,\ x^3+x^2+x+1, \\ &x^3-1,\ x^3+1 \end{aligned}}$$

問題 1A 類題

同年の京大理系入試では, これと関連してより難易度の高い問題 (下記) が出題されている。文系数学の範囲内でも一応解くことができるため, 興味のある人はぜひチャレンジしてほしい。

類題: 京都大学 2016 年 理系 第 6 問

複素数を係数とする 2 次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ に対し, 次の条件を考える。

(イ) $f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れる。

(ロ) $f(x)$ の係数 a, b の少なくとも一方は虚数である。

この 2 つの条件 (イ), (ロ) を同時に満たす 2 次式をすべて求めよ。

類題の解答は次ページから。

類題の解答

$f(x^3)$ を $f(x)$ で割った商 (4 次式) を $g(x)$ とおく。このとき条件 (イ) より $f(x^3)=g(x)f(x)$ となるが, 方程式 $f(x)=0$ の解の 1 つを $\alpha\,(\in\mathbb{C})$ としてこの式に代入すると $f(\alpha^3)=g(\alpha)f(\alpha)=g(\alpha)\cdot 0=0$ より $f(\alpha^3)=0$ がしたがう。よって複素数 α が方程式 $f(x)=0$ の解であるとき, α^3 もまた方程式 $f(x)=0$ の解である。以下, 2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの複素数解の関係で場合分けする。

$\boxed{1}$ $f(x)=0$ が重解をもつとき

重解を α とすると, $x^2+ax+b=(x-\alpha)^2\left(=x^2-2\alpha x+\alpha^2\right)$ より $a=-2\alpha,\,b=\alpha^2$ が成り立つ。さきの議論より α^3 も $f(x)=0$ の解であるため α^3 は α にほかならず, $\alpha^3=\alpha$ より $\alpha=0,\,1,\,-1$ となる。しかしいずれの場合も $a,b\in\mathbb{R}$ となり, 条件 (ロ) に反するため不適。

$\boxed{2}$ $f(x)=0$ が相異なる 2 つの複素数解をもつとき

2 解を $\alpha,\beta\,(\alpha,\beta\in\mathbb{C},\,\alpha\neq\beta)$ とする。このとき $\alpha^3,\,\beta^3$ も方程式 $f(x)=0$ の解となるが, 以下それら 2 つが α,β のどちらと等しいかで場合分けする。

$\boxed{\text{2-1}}$ $\alpha^3=\alpha$ のとき

これを解くことで $\alpha=0,\,1,\,-1$ を得る。

(i) $\alpha=0$ のとき

$b=0$ より $f(x)=x^2+ax=x(x+a)$ であり, $\beta=-a$ (ただし $a\neq 0$) を得る。$\beta\neq 0$ なので $\beta^3=\beta$ に限られるが, このとき $\beta=1,\,-1$ しかなく, いずれの場合も $a,b\in\mathbb{R}$ となるため条件 (ロ) に反する。

(ii) $\alpha=1$ のとき

$f(1)=1+a+b=0$ より $b=-(a+1)$ なので $f(x)=x^2+ax-(a+1)=(x-1)\{x+(a+1)\}$ となり, 方程式 $f(x)=0$ の解は $x=1,\,-(a+1)$ とわかる (ただし重解でないため $a\neq -2$)。これと $\alpha=1,\,\alpha\neq\beta$ より $\beta=-(a+1)$ を得る。ここで $\beta^3=\beta$ とすると $\beta=0,\,1,\,-1$ に限られるが, $\beta=-(a+1)$ および $b=-(a+1)$ より $a,b\in\mathbb{R}$ となり不適。よって $\beta^3=\alpha=1$ に限定される。$\beta\neq\alpha=1$ に注意すると $\beta=-(a+1)=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ とわかり, 解と係数の関係より

$$(a,b)=(-(\alpha+\beta),\,\alpha\beta)=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\,\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right),\,\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\,\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$$

がしたがう。これらの組はいずれも条件 (ロ) をみたしている。

(iii) $\alpha=-1$ のとき

$f(-1)=1-a-b=0$ より $b=a-1$ なので $f(x)=x^2+ax+a-1=(x+1)\{x+(a-1)\}$ となり, 方程式 $f(x)=0$ の解は $x=-1,\,-a+1$ とわかる (ただし重解でないため $a\neq 2$)。これと $\alpha=-1,\,\alpha\neq\beta$ より $\beta=-a+1$ を

得る。ここで $\beta^3=\beta$ は (ii) 同様に不適。よって $\beta^3=\alpha=-1$ に限定される。$\beta\neq\alpha=-1$ に注意すると $\beta=-a+1=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ とわかり, 解と係数の関係より

$$(a,\,b)=(-(\alpha+\beta),\,\alpha\beta)=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2},\,\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right),\,\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2},\,\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

がしたがう。これらの組はいずれも条件 (ロ) をみたしている。

$\boxed{\textbf{2-2}}$ $\boldsymbol{\alpha^3=\beta}$ のとき

(i) $\beta^3=\beta$ のとき

$\alpha,\,\beta$ の対称性より, これは $\boxed{\textbf{2-1}}$ と同じである。

(ii) $\beta^3=\alpha$ のとき

$\left(\beta^3\right)^3=\alpha^3=\beta$ より $\beta^9-\beta=\left(\beta^8-1\right)\beta=0$ が成り立つ。よって β の値は $\beta=0$　または　$\beta=\cos\dfrac{k\pi}{4}+i\sin\dfrac{k\pi}{4}$　$(k=0,\,1,\,2,\,\cdots,\,7)$ に絞られる。$\beta=0$ とすると $\alpha=0$ という重解になり不適 ($a,\,b\in\mathbb{R}$ という点でも不可)。$\beta=\cos\dfrac{k\pi}{4}+i\sin\dfrac{k\pi}{4}$ の場合は

$$\alpha=\beta^3=\cos\frac{3k\pi}{4}+i\sin\frac{3k\pi}{4}\quad(\because \text{de Moivre の定理})$$

となるが, $k=0,\,1,\,2,\,\cdots,\,7$ の各々に対応する $\alpha,\,\beta$ の値は次のようになる。

表 3: $\alpha,\,\beta$ の値とそれらに対応する $a,\,b$ の値

k	0	1	2	3	4	5	6	7
β	1	$\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$	i	$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{1-i}{\sqrt{2}}$	$-i$	$\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$
$\alpha\ \left(=\beta^3\right)$	1	$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$	$-i$	$\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$	i	$\frac{1-i}{\sqrt{2}}$
$a\ (=-(\alpha+\beta))$	-2	$-\sqrt{2}i$	0	$-\sqrt{2}i$	2	$\sqrt{2}i$	0	$\sqrt{2}i$
$b\ (=\alpha\beta)$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

これらのうち, 条件 (ロ) をみたす $(a,\,b)$ の組は $(a,\,b)=(\pm\sqrt{2}i,\,-1)$ のみである。

以上より, 条件をみたす関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\underline{\boldsymbol{x^2+\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}x+\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}}\quad(\text{複号同順}),}$$
$$\underline{\boldsymbol{x^2+\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}x+\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}}\quad(\text{複号同順}),}$$
$$\underline{\boldsymbol{x^2\pm\sqrt{2}ix-1}}$$

である。

類題の別解

$f(x)=x^6+ax^3+b$ を $f(x)=x^2+ax+b$ で割ると

$$\begin{aligned} x^6+ax^3+b &= \left\{x^4-ax^3+(a^2-b)x^2-(a^3-2ab-a)x+(a^4-3a^2b-a^2+b^2)\right\}(x^2+ax+b) \\ &\quad -a\left\{a^4-(4b+1)a^2+(3b^2+b)\right\}x-b\left\{a^4-(3b+1)a^2+(b^2-1)\right\} \end{aligned}$$

となる。いま $f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れるのだから

$$\begin{cases} a\left\{a^4-(4b+1)a^2+(3b^2+b)\right\}=0 & \cdots ① \\ b\left\{a^4-(3b+1)a^2+(b^2-1)\right\}=0 & \cdots ② \end{cases}$$

が成り立つ。

① より $a=0$ または $a^4-(4b+1)a^2+(3b^2+b)=0$ である。$a=0$ とすると, これを ② に代入することで $b(b^2-1)=0$ つまり $b=0,\pm1$ が得られるが, いずれの場合も $a,b\in\mathbb{R}$ となり不適。よって $a\neq0$ であり $a^4-(4b+1)a^2+(3b^2+b)=0 \quad \cdots ③$ がいえる。

② より $b=0$ または $a^4-(3b+1)a^2+(b^2-1)=0$ である。$b=0$ とすると, これを ① に代入することで $a(a^4-a^2)=0$ つまり $a=0,\pm1$ が得られるが, いずれの場合も $a,b\in\mathbb{R}$ となり不適。よって $b\neq0$ であり $a^4-(3b+1)a^2+(b^2-1)=0 \quad \cdots ④$ がいえる。

さて, ③ $\Leftrightarrow (a^2-b)\left\{a^2-(3b+1)\right\}=0 \Leftrightarrow a^2=b$ または $a^2=3b+1$ であり, このどちらが成り立っているかで場合分けする。

(i) $a^2=b$ のとき

④ に $a^2=b$ を代入し, b について解くことで $b=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ を得る。いま $|b|=1$ より $|a|=1$ がいえる。次に $\arg a=\theta\,(0\leqq\theta<2\pi)$ とし, この偏角 θ を求める。

$b=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき $\exists k\in\mathbb{Z},\ 2\theta=\dfrac{2}{3}\pi+2k\pi$ となり, $0\leqq\theta<2\pi$ より $\theta=\dfrac{1}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$ を得る。これらはそれぞれ $(a,b)=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right),\ \left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$ に対応しており, また条件 (ロ) をみたす。

$b=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ のとき $\exists k\in\mathbb{Z},\ 2\theta=\dfrac{4}{3}\pi+2k\pi$ となり, $0\leqq\theta<2\pi$ より $\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$ を得る。これらはそれぞれ $(a,b)=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right),\ \left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$ に対応しており, また条件 (ロ) をみたす。

(ii) $a^2=3b+1$ のとき

④ も $a^2=3b+1$ を代入し, b について解くことで $b=\pm1$ を得る。$b=1$ のとき, $a^2=4$ より $a=\pm2$ となるが, いずれの場合も $a,b\in\mathbb{R}$ となり不適。$b=-1$ のとき $a^2=-2$ より $a=\pm\sqrt{2}i$ となり, いずれの場合も条件 (ロ) をみたす。

(解答はさきほどのものと同じ。)

問題 1B (東京大学 2015 年 文系 第 1 問)

以下の命題 A, B それぞれに対し, その真偽を述べよ。また, 真ならばその証明を与え, 偽ならば反例を与えよ。

命題 A　n が正の整数ならば, $\dfrac{n^3}{26} + 100 \geqq n^2$ が成り立つ。

命題 B　整数 n, m, l が $5n + 5m + 3l = 1$ をみたすならば, $10nm + 3ml + 3nl < 0$ が成り立つ。

問題 1B のポイント

整数や不等式に関する 3 つの命題の真偽を判定する問題。いずれも反例がギリギリある (or ない) 数値設定になっているため, ぱっと見で真偽はわからず, 手を動かして調べることとなる。

この類の問題では, もし反例が見つかったら (命題が偽であるとわかったら), その反例とそれが反例になっていることの説明を答案に書くだけで問題なく正解であり, 労力的にも明らかに楽である。したがって, まずは問題用紙の余白などで計算をして, 反例がないか探すのがよいだろう。そこで反例が見つかれば, それを答案に書きさえすればよいのだから。もちろん, 反例など存在しない (真である) 可能性もあるわけで, 実際今回の 命題 B も真なのだが, この場合は余白に書いた計算やロジックを整理して答案用紙に書き込めばよい。以上の理由から, 命題の真偽判定の問題では, いきなり答案用紙で計算等をしないことを推奨している。

命題 A では, 不等式の両辺の差をとり, n を連続化してたとえば $f(x) := \dfrac{1}{26}x^3 - x^2 + 100 \quad (x > 0)$ という関数にし, その増減を調べるのがオーソドックスな解法だ。増減を調べると $x = \dfrac{52}{3}$ で極小点をとることがわかり, この前後の整数での不等式の成立を調べればよいこととなる。ただし, $f\left(\dfrac{52}{3}\right)$ 自体は調べなくてよいことに注意しよう。$f(17)$, $f(18)$ の符号がわかれば, それだけで 命題 A の真偽は確定するからだ。

命題 B では, まず条件式 $5n + 5m + 3l = 1 \Leftrightarrow 3l = 1 - 5n - 5m$ を用いて $10nm + 3nl + 3ml = n - 5n^2 + m - 5m^2$ と変形する。この n, m の式が常に負になるかどうかを調べることになるが, n, m のクロスタームが存在しないため, $n - 5n^2$ と $m - 5m^2$ に分け, 各々の最大値を考えるという方針がよいだろう。命題 A 同様, $g(x) = x - 5x^2$ のような連続化した関数でグラフを描き, それをもとに $n - 5n^2$ や $m - 5m^2$ の最大値を求めていく。すると $n - 5n^2 + m - 5m^2$ は $n = m = 0$ のときに最大値 $0 + 0 = 0$ をとり, このとき不等式が成り立たないように見える。しかし, まだ考慮していない条件 $l \in \mathbb{Z}$ を確認することで, $n = m = 0$ とはならないことがわかる。式変形の過程で l を消去することにより忘れがちな $l \in \mathbb{Z}$ という条件を改めてチェックできるか否かがポイントであった。

問題 1B 解答例

命題 A

$n = 17\,(\in \mathbb{N})$ とすると[10]

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \frac{17^3}{26} + 100 = \frac{17^3 + 2600}{26} = \frac{7513}{26} \\ (\text{右辺}) &= 17^2 = \frac{17^2 \cdot 26}{26} = \frac{7514}{26}\end{aligned}$$

となり, (左辺) $<$ (右辺) より問題文の不等式が成り立たない。よって 命題 A は偽であり, 反例は $\boldsymbol{n = 17}$ である。

命題 B

与えられた条件式より $3l = 1 - 5n - 5m$ であり, これを用いることで

$$\begin{aligned}10nm + 3ml + 3nl = 10nm + 3l(m+n) &= 10nm + (1 - 5n - 5m)(m+n) \\ &= n - 5n^2 + m - 5m^2\end{aligned}$$

を得る。

ここで n, m が各々独立に任意の整数値をとれるとし, $n - 5n^2$ と $m - 5m^2$ それぞれの最大値を考える。これらを連続化した関数 $f(x) = x - 5x^2$ は $f(x) = -5\left(x - \dfrac{1}{10}\right)^2 + \dfrac{1}{20}$ と変形でき, そのグラフは直線 $x = \dfrac{1}{10}$ を軸とする上に凸な放物線である。よって $x \in \mathbb{Z}$ に制限すると $f(x)$ は $x = 0$ でのみ最大値をとり, その最大値は 0 である[11]。したがって, m, n が独立な整数であるという仮定のもとで, $n - 5n^2 + m - 5m^2$ は $n = m = 0$ のときのみ[12]最大値 0 をとりうる。

しかし, $m = n = 0$ とすると問題文の条件より $l = \dfrac{1}{3}$ となり, $l \in \mathbb{Z}$ を満たさない。よって $5n + 5m + 3l = 1$ $(n, m, l \in \mathbb{Z})$ のもとで $(m, n) \neq (0, 0)$ であるから, さきの最大値の条件とあわせると, $n - 5n^2 + m - 5m^2$ は常に 0 より小さい値をとる。よって $10nm + 3ml + 3nl < 0$ がいえ, 命題 B は真とわかる。■

[10]先述の通り, $n = 17$ という値を見つけるプロセスは答案に一切書かなくてよい (もちろん, 書いたら減点される, ということもない)。ただし, 反例を挙げるだけの答案になるため, 計算ミスがあると一切点がもらえない可能性がある。計算の誤りには普段以上に留意しよう。

[11]答案には, 関数 $f(x)$ のグラフやその曲線上で t x 座標が整数である点などを描いておくと, 自分にとっても採点者にとっても理解しやすい答案となる。

[12]$m = n = 0$ のとき "のみ" 最大となりうることに注意。最大点がほかにも存在する可能性を否定しておかないと, $(m, n) \neq (0, 0)$ から $n - 5n^2 + m - 5m^2 < 0$ がいえなくなる。

答案添削講座（東大・京大レベル）解答用紙	問題番号	1B 2015 東大文1	解答例

Ⓐ $\left(f(x) := \dfrac{x^3}{26} - x^2 + 100 \qquad f'(x) = \dfrac{3}{26}x^2 - 2x = \dfrac{3}{26}x\left(x - \dfrac{52}{3}\right) \qquad 17?\ 18? \right)$

$$\frac{17^3}{26} - 17^2 + 100 = \frac{4913}{26} - 189 = \frac{4913-4914}{26} = -\frac{1}{26} < 0$$

より $\boxed{\text{偽}}$ （反例: $n=17$）

$$\left(\begin{array}{r} 189 \\ \times\ 26 \\ \hline 1134 \\ 378\ \ \\ \hline 4914 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 289 \\ \times\ 17 \\ \hline 2023 \\ 289\ \ \\ \hline \end{array} \right)$$

最終的に不要になったメモ等は，括弧でくくるなどしておく。

Ⓑ $5n+5m+3l=1 \cdots ①$ のもとで

$$\begin{aligned} 10nm+3ml+3nl &= 10nm+(n+m)\cdot 3l \\ &= 10nm+(n+m)\cdot(1-5n-5m) \\ &= 10nm+(n-5n^2-5nm+m-5nm-5m^2) \\ &= \underbrace{-5n^2+n}_{=:\,g(n)} - 5m^2+m \cdots ② \end{aligned}$$

（gは$\mathbb{Z}$上で定義する）

である。ここで $g(n) = -5\left(n-\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{20}$ であり，$g(0)=0$，$g(1)=-4<0$ であるため

②$(=g(n)+g(m))$ は $n=m=0$ のときに限り0以上となりうる。しかしこのとき

① より $l=\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$ となり不適。

以上より命題Bは $\boxed{\text{真}}$ である。■