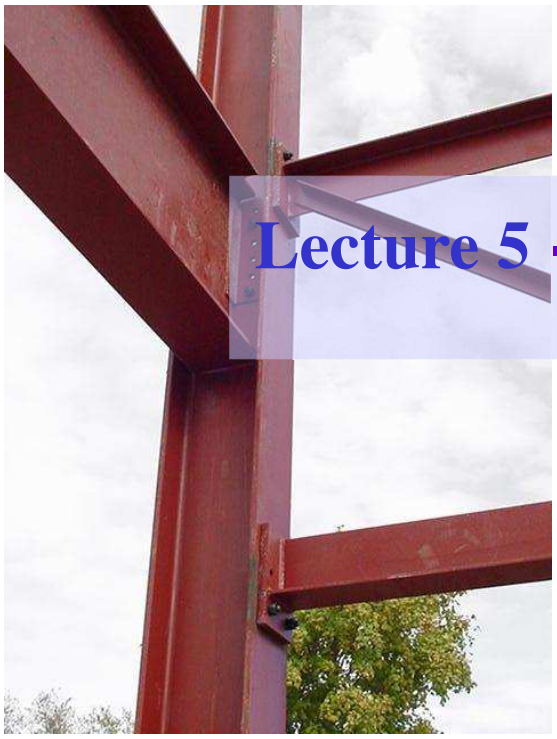


Lecture 5 - Analysis of Compression Members

- Compression Members
- Critical Load (Euler's Formula)
- Allowable Stress
- Effective Length

Mongkol JIRAVACHARADET

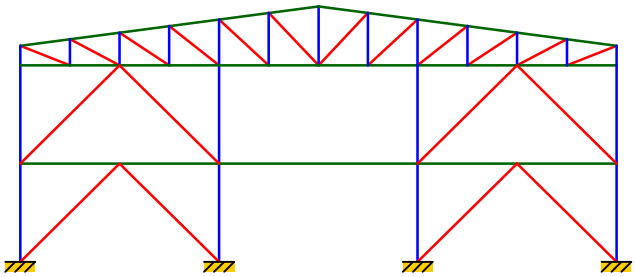
SURANAREE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

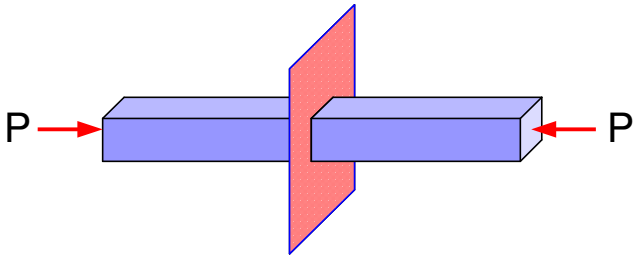
INSTITUTE OF ENGINEERING

SCHOOL OF CIVIL ENGINEERING

Compression Members

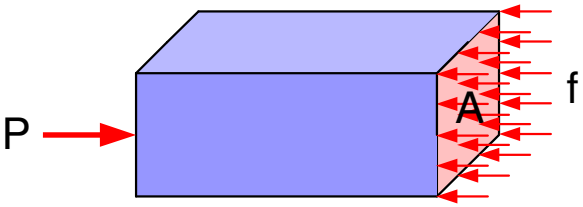
- Building Columns
- Frame Bracing
- Truss Members





Member is subjected to compression force through the centroid of section

Axial Force (Compression)



Compressive Stress :

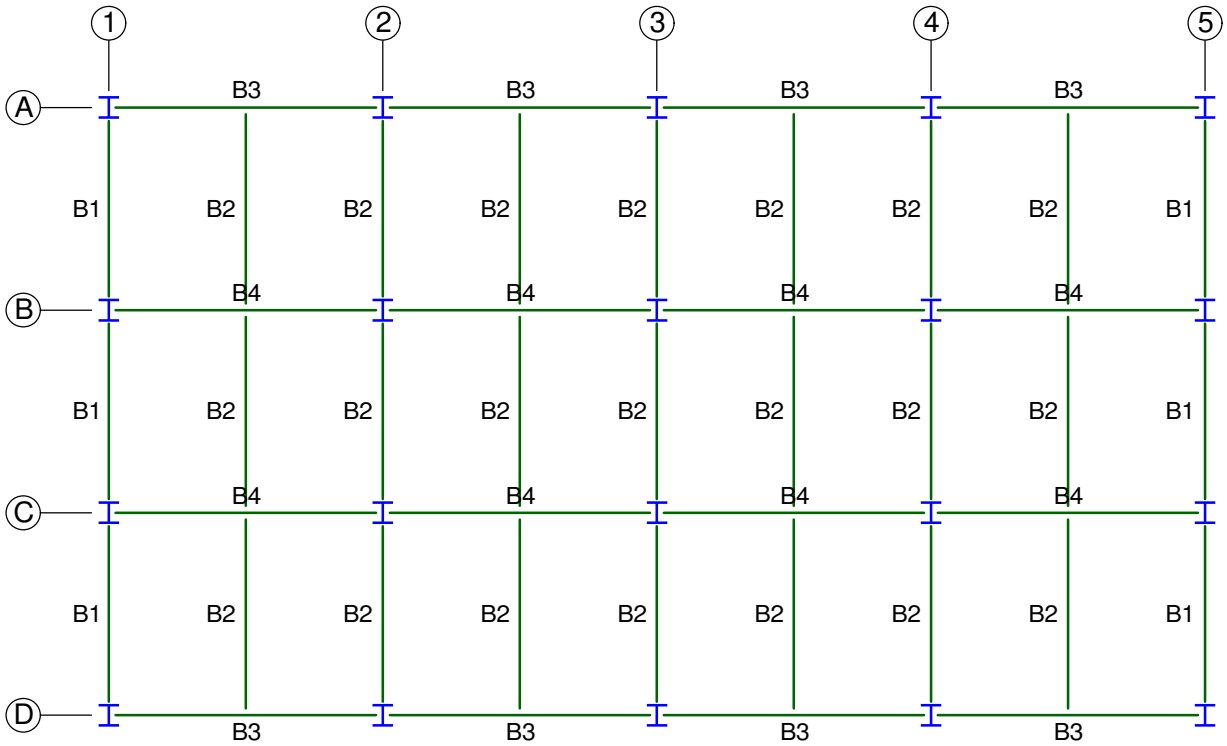
$$f = \frac{P}{A}$$

Compression v.s. Tension Members

- Tension causes lengthening of member.
- Compression causes buckling of member.

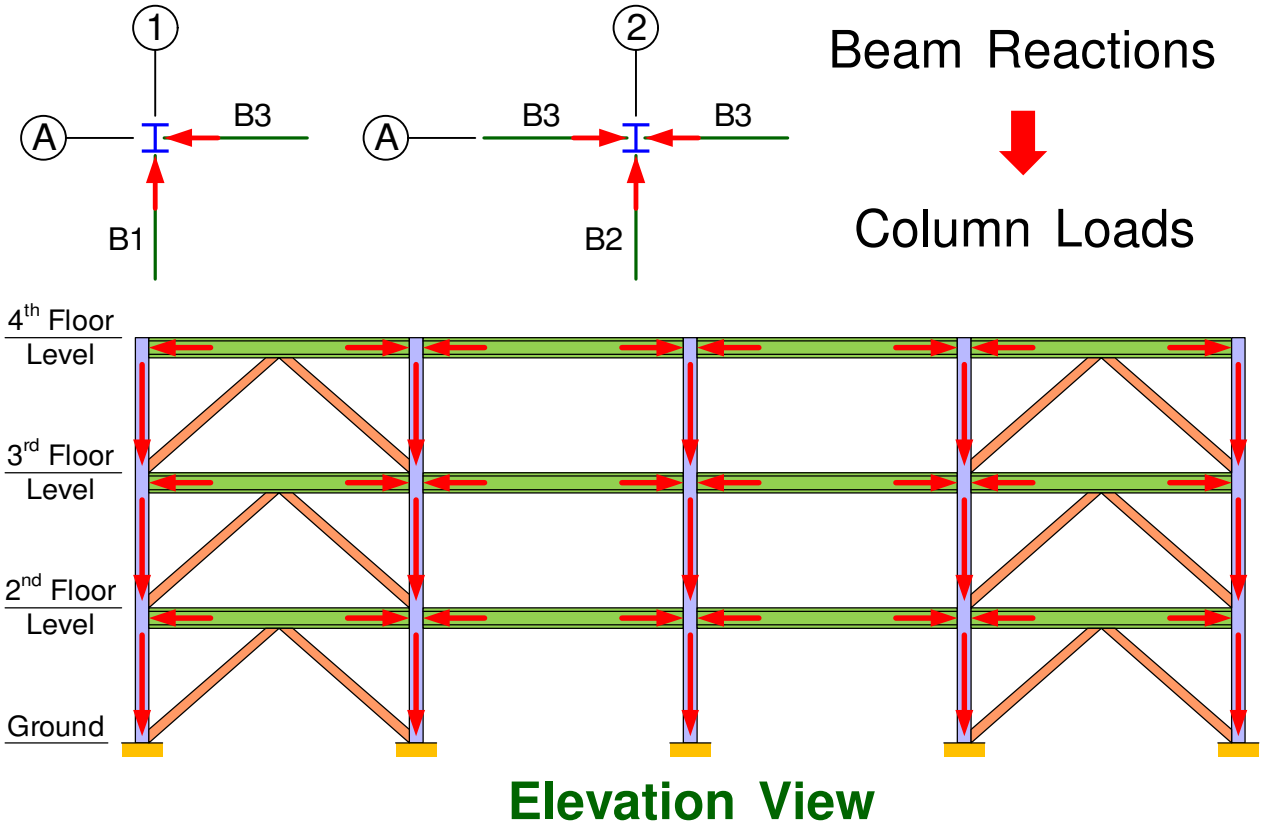
- Bolted connection reduces an area of tension member.
- Bolted can taking load in compression member.

Load Transfer to Column



Floor Plan

Load Transfer to Column



Elevation View

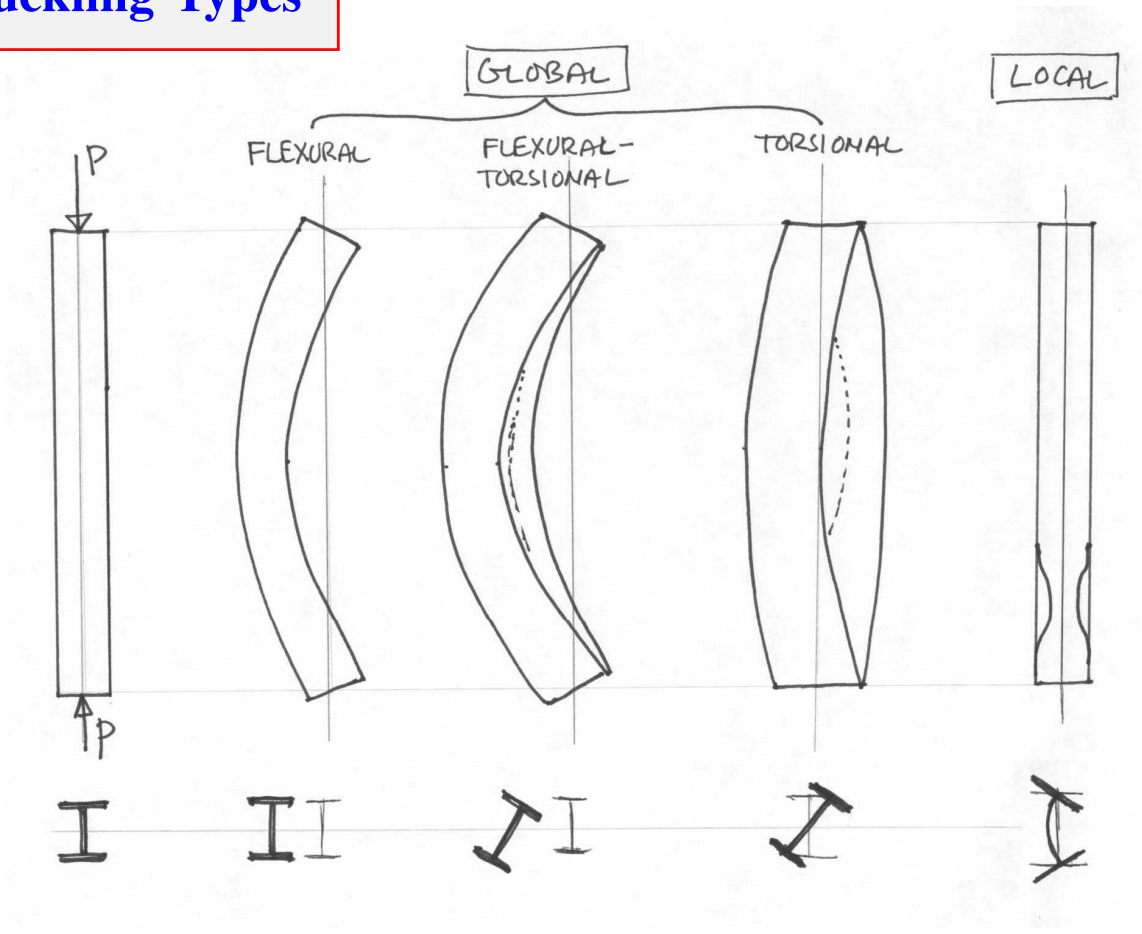
Column Load Table

		A – 1	A – 2
Story 3	4th Floor 3.5 m 3rd Floor	B1 = 2.0 t B3 = 4.5 t Column = 1.0 t **Total = 7.5 t**	B2 = 4.0 t 2B3 = 9.0 t Column = 1.0 t **Total = 14.0 t**
Story 2	3th Floor 3.5 m 2rd Floor	B1 = 2.0 t B3 = 4.5 t Column = 1.0 t Total = 7.5 t **Sum = 15.0 t**	B2 = 4.0 t 2B3 = 9.0 t Column = 1.0 t Total = 14.0 t **Sum = 28.0 t**
Story 1	2rd Floor 4.0 m Ground	B1 = 2.0 t B3 = 4.5 t Column = 1.2 t Total = 7.7 t **Sum = 22.7 t**	B2 = 4.0 t 2B3 = 9.0 t Column = 1.2 t Total = 14.2 t **Sum = 42.2 t**

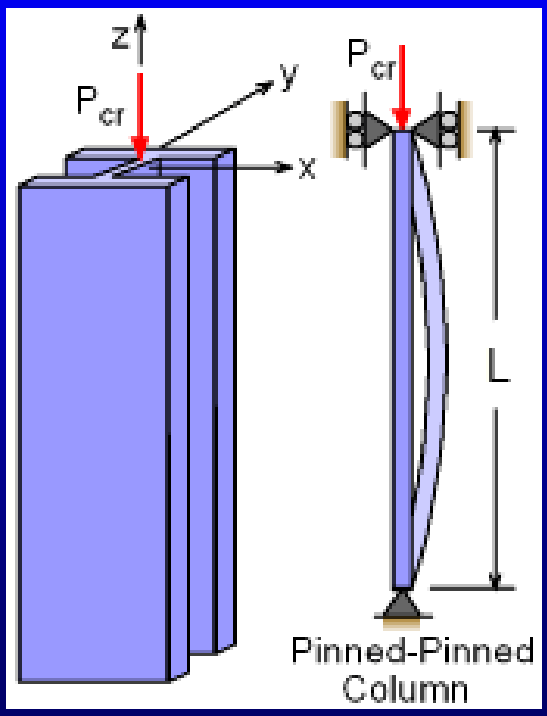
How can column fail?

- Compression
- Flexural or Lateral Buckling
- Local Buckling
- Torsional Buckling

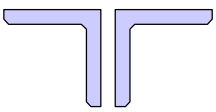
Buckling Types



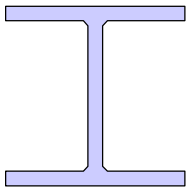
Buckling Test of Steel Column



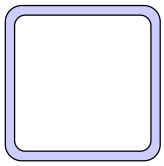
Sections used for Columns



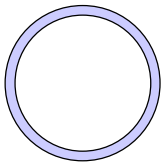
Double angle



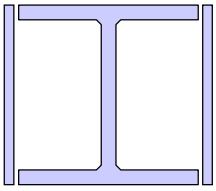
Wide flange

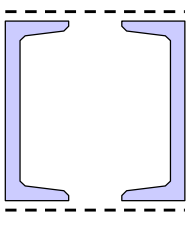


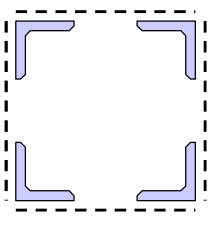
Tube



Pipe

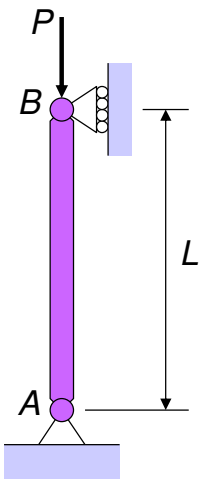


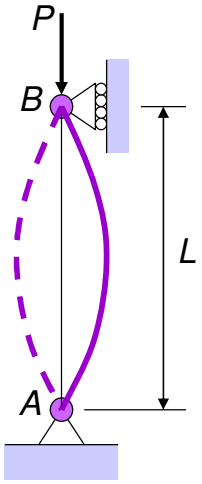




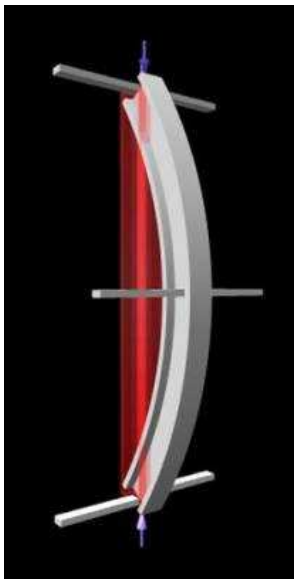
Built-up sections

Buckling





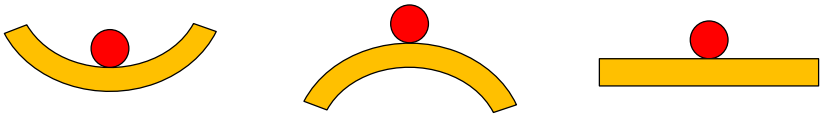
Buckling of column due to axial compressive load *P*



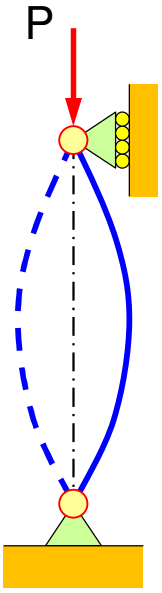
Buckling *is the sudden large deformation of a member due to slightly increase of an existing axial compression.*

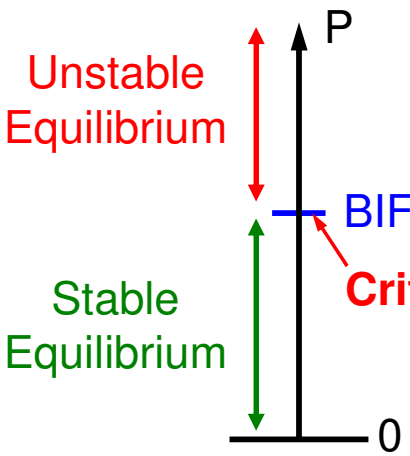
Critical Load

Equilibrium types:



Stable Unstable Neutral



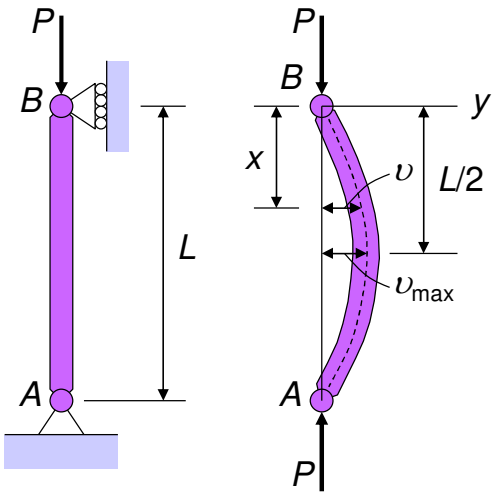


BIFURCATION – NEUTRAL

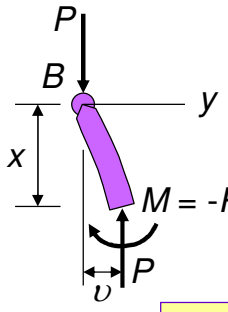
Critical Load, P_{cr}

➔ *Max. compression load that column can support just before buckling*

Columns with Pinned Ends



Ideal column:
- perfectly straight
- linearly elastic material
- no imperfections



Bending-moment equation

Differential equation of deflected curve $\frac{d^2\upsilon}{dx^2} + \frac{P}{EI}\upsilon = 0$

General solution: $\upsilon(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) + C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right)$

Boundary conditions: $\upsilon(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$

$\upsilon(L) = 0 \rightarrow C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L\right) = 0$

$\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L\right) = 0 \rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}}\,L = n\pi \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

Critical load P_{cr} occurs at the minimum load when n = 1

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$ → **Euler's formula**

Leonhard Euler (1707-1783)

The greatest mathematician of all time

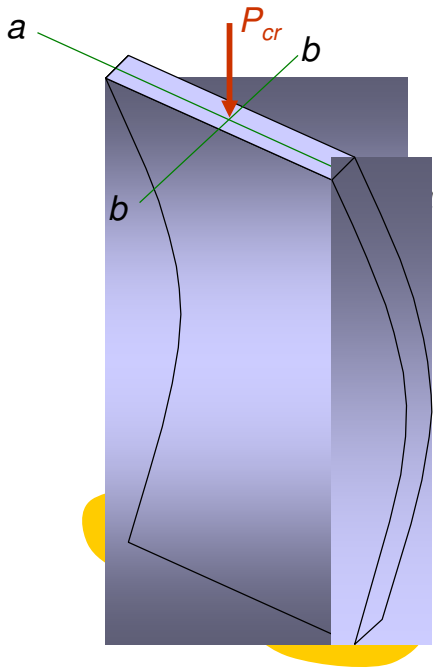
- Critical load of slender column buckling
- Analysis and the theory of numbers
- Calculus of variations
- Theory of the Motions of Rigid Bodies

He produced almost half his total works despite the total blindness.

Buckling about the Weakest Axis

From $P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2}$

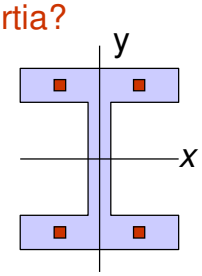
I = ***least*** moment of inertia

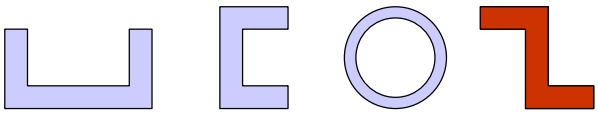


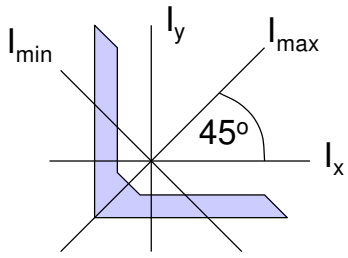
Which axis give the least moment of inertia?

For symmetry section,

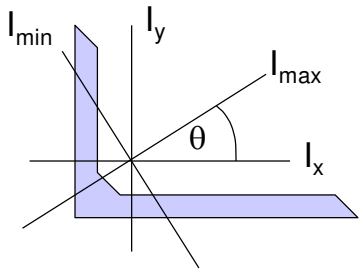
use minimum of I_x and I_y







Angle section
equal legs



Angle section
Unequal legs

Critical Stress

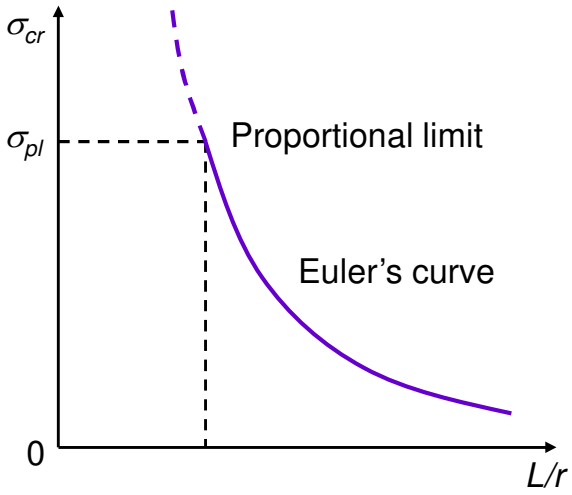
Dividing critical load by cross-sectional area

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2}$$

Radius of gyration $r = \sqrt{I / A}$

Critical stress $\sigma_{cr} = \dfrac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$

Slenderness ratio L / r



ตัวอย่างที่ 5-1 **(a)** W250x175 เป็นเสาปลายจุดหมุนยาว 5.0 เมตร จงพิจารณาแรงอัดที่ยอมให้โดยใช้ F.S. = 2 สมมุติให้เหล็กมี Proportional Limit = 2,500 ก.ก./ซม.^{2} และ **(b)** ทำข้อ **(a)** ซ้ำโดยใช้ความยาว 2.5 เมตร

วิธีทำ **(a)** W250×175 (**A** = 56.24 ซม.^{2}, $\mathbf{r_x}$ = 10.4 ซม., $\mathbf{r_y}$ = 4.18 ซม.)

ค่า **r** น้อยที่สุดคือ $\mathbf{r_y}$ = 4.18 ซม.

L/r = 5.0(100)/4.18 = 119.6

ค่าวิกฤตของ $\frac{P}{A} = \frac{\pi^2\left(2.1\times10^6\right)}{\left(119.6\right)^2} = 1,448$ ก.ก./ซม.^{2} < 2,500 ก.ก./ซม.^{2} OK

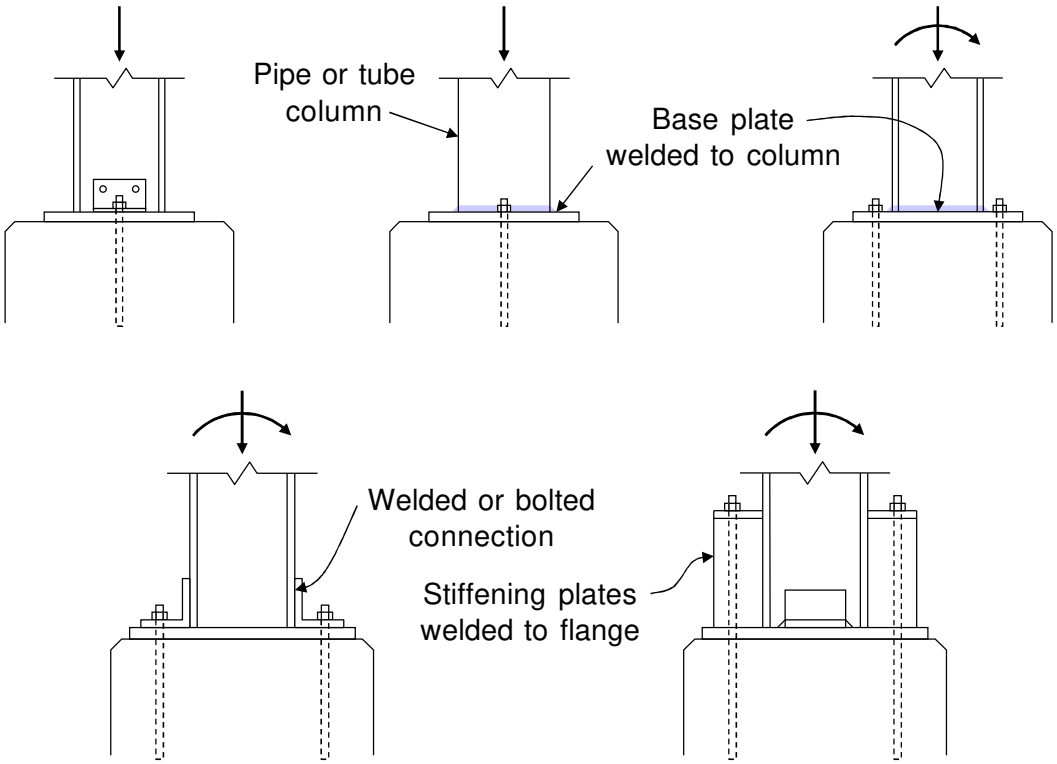
เสาอยู่ในช่วงอีลาสติก

(b) **L/r** = 2.5(100)/4.18 = 59.81

ค่าวิกฤตของ $\frac{P}{A} = \frac{\pi^2\left(2.1\times10^6\right)}{\left(59.81\right)^2} = 5,791$ ก.ก./ซม.^{2} > 2,500 ก.ก./ซม.^{2} NG

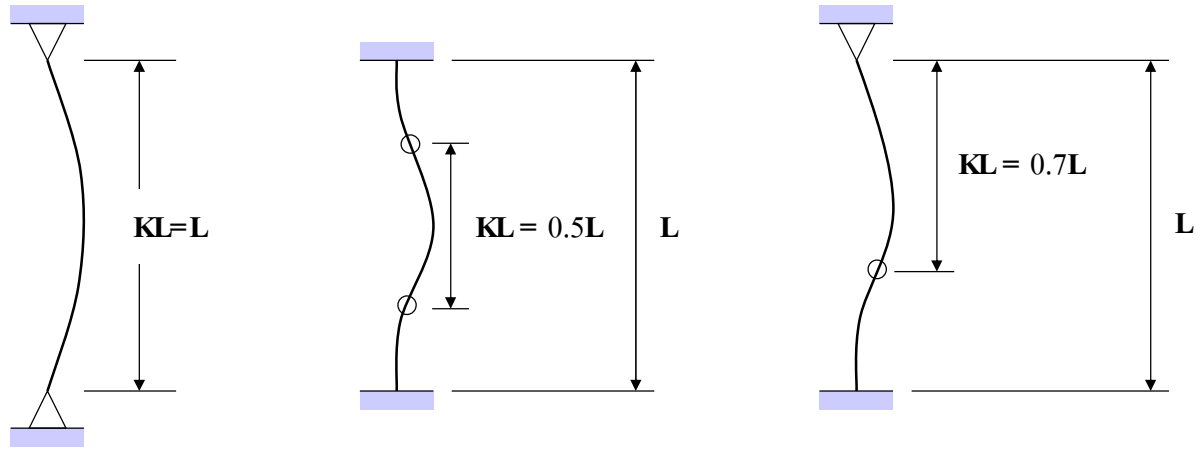
เสาไม่อยู่ในช่วงอีลาสติกไม่สามารถใช้สูตรของออยเลอร์ได้

ชนิดของจุดรองรับเสา



ความยาวประสิทธิผล

คือระยะระหว่าง **จุดดัดกลับ (Inflection Point)** ซึ่งมีโมเมนต์เป็นศูนย์ มีค่าเท่ากับ **KL**

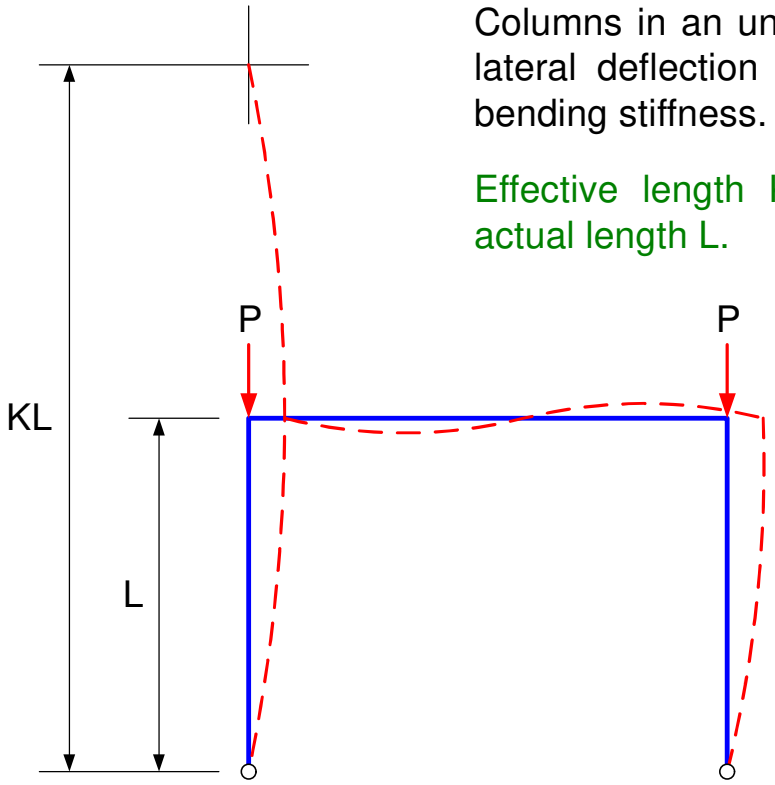


K = 1.0 (a)

K = 0.5 (b)

K = 0.7 (c)

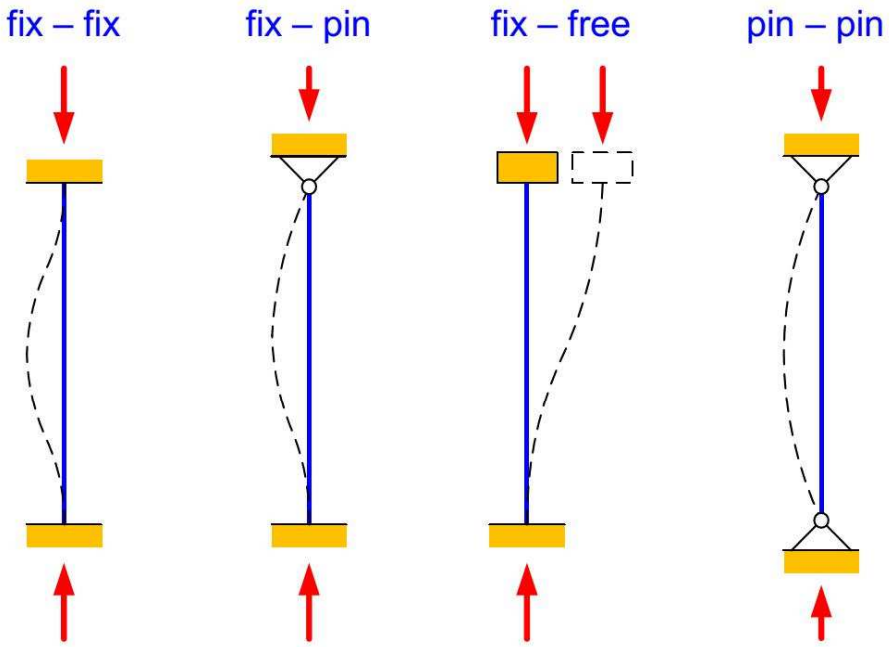
Column in Unbraced Frame



Columns in an unbraced frame resist lateral deflection entirely on its own bending stiffness.

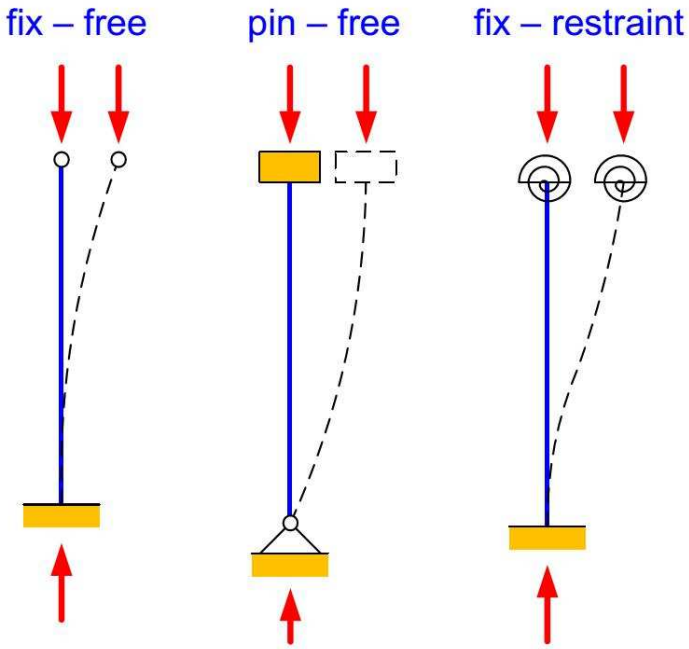
Effective length KL will exceed the actual length L.

Ideal Effective Length Factor



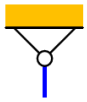
ค่า K ทฤษฎี	0.5	0.7	1.0	1.0
ค่า K ออกแบบ	0.65	0.8	1.2	1.0

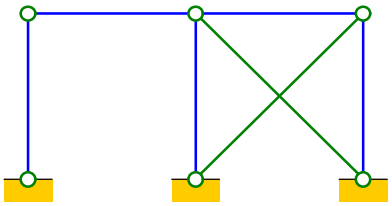
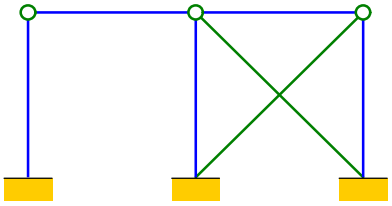
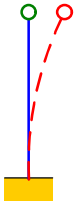
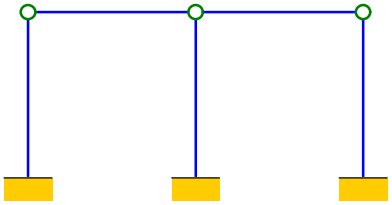
Ideal Effective Length Factor

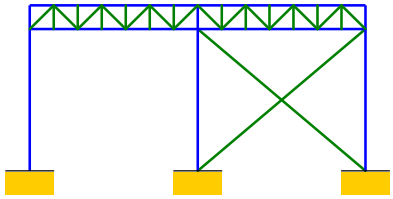
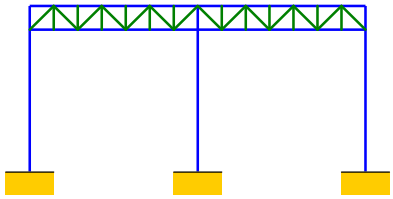


ค่า K ทฤษฎี	2.0	2.0	/
ค่า K ออกแบบ	2.1	2.0	1.5

สัญลักษณ์การยึดปลาย

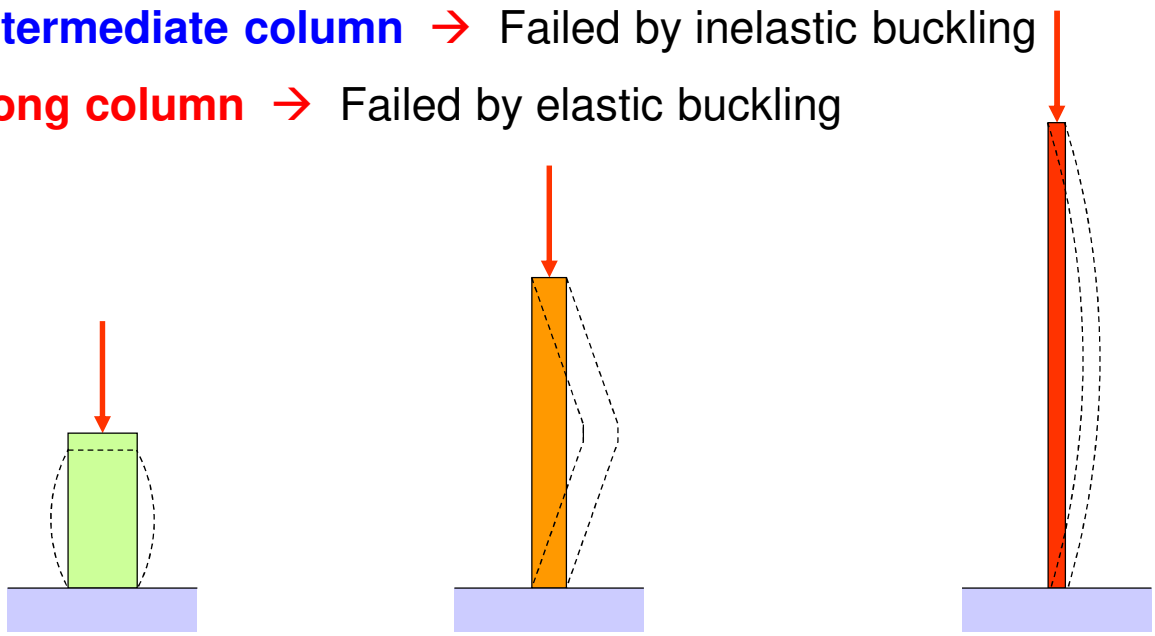
	การหมุนถูกยึด การเคลื่อนที่ถูกยึด
	การหมุนอิสระ การเคลื่อนที่ถูกยึด
	การหมุนถูกยึด การเคลื่อนที่อิสระ
	การหมุนอิสระ การเคลื่อนที่อิสระ
	การหมุนถูกยึดบางส่วน การเคลื่อนที่อิสระ

Model	Example	K
		1.0
		0.8
		2.1

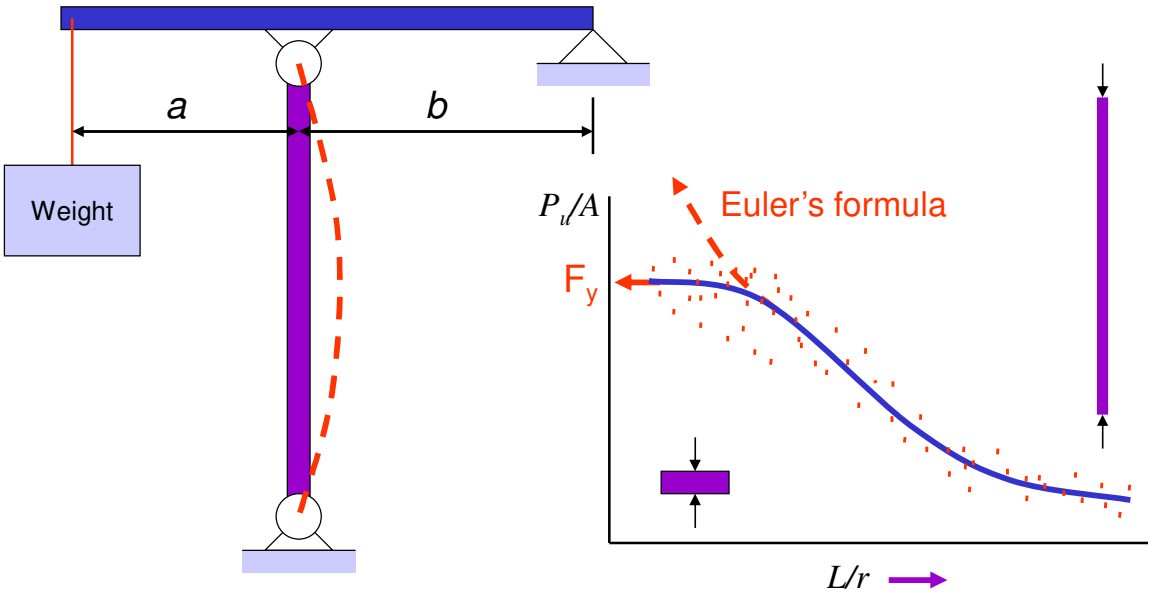
Model	Example	K
		0.65
		1.2

Type of Columns

- **Short column** → Failed by material strength
- **Intermediate column** → Failed by inelastic buckling
- **Long column** → Failed by elastic buckling



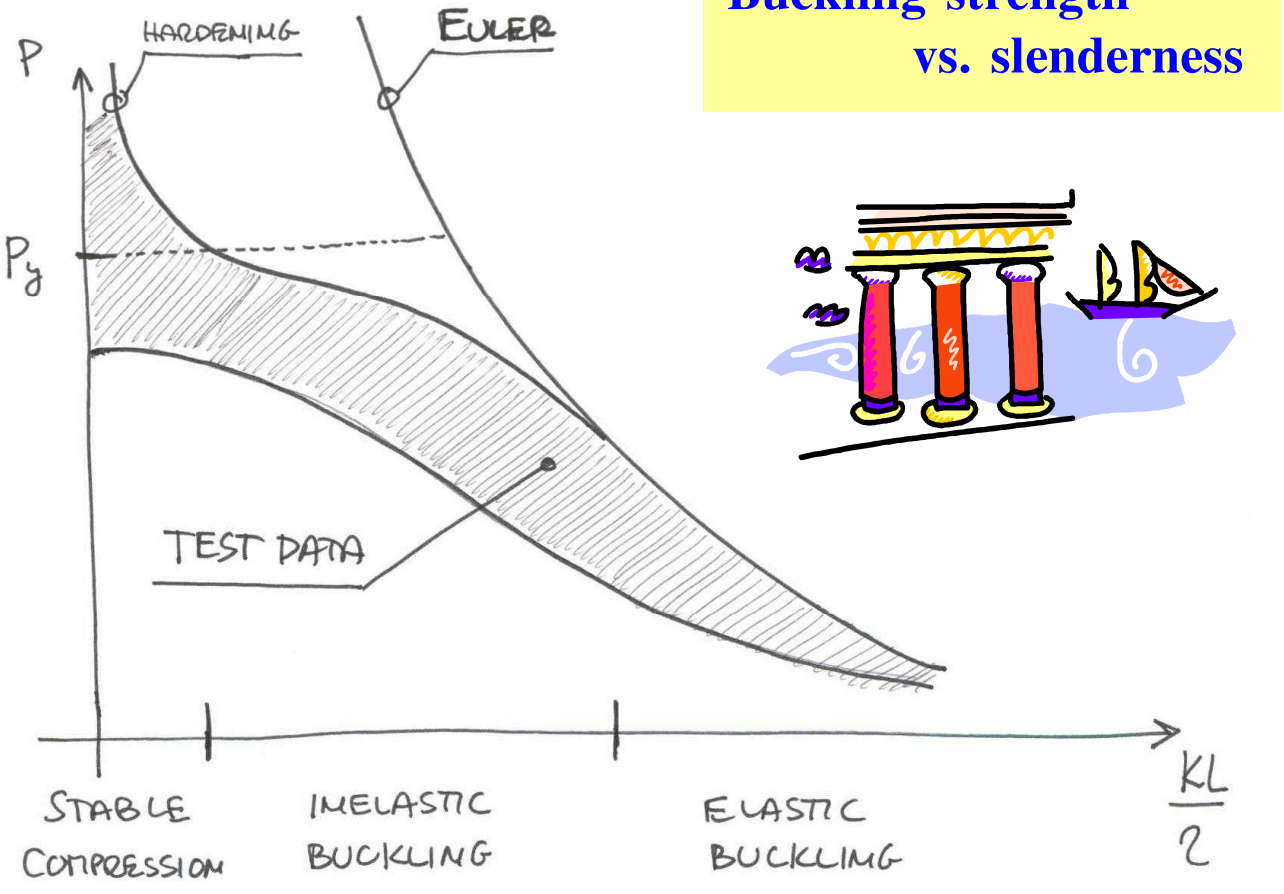
Column Buckling Strength from Experiment



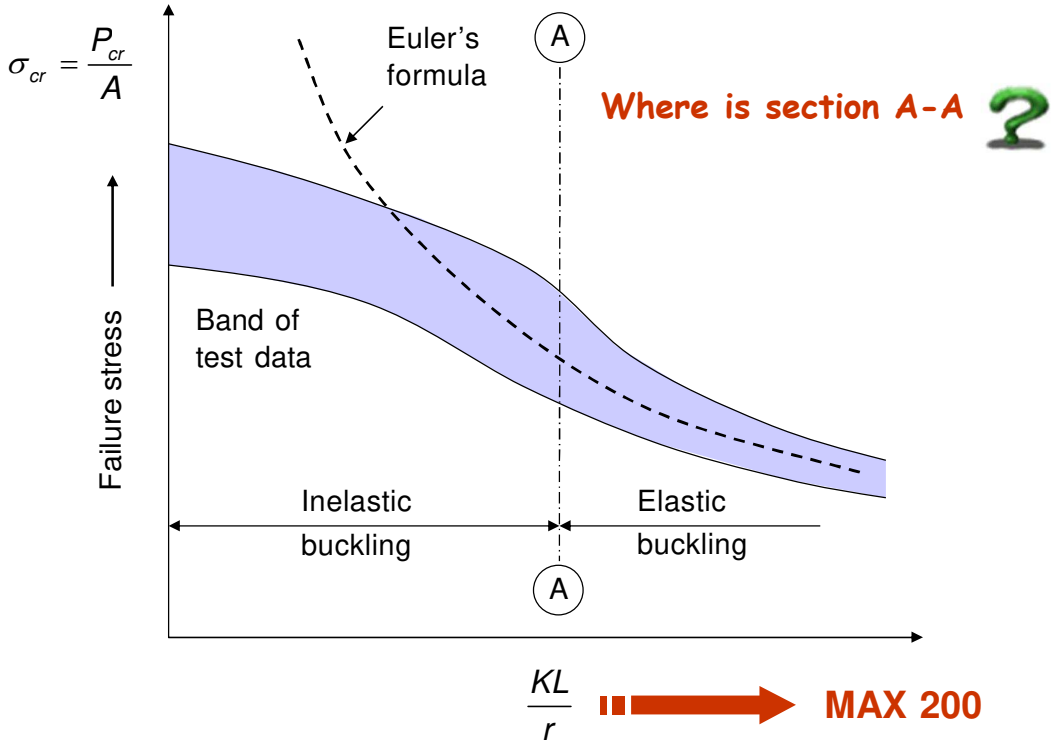
Short Column fails by **Yielding**, Long Column fails by **Buckling**

So, What happen to Intermediate Column ? Fails by **???**

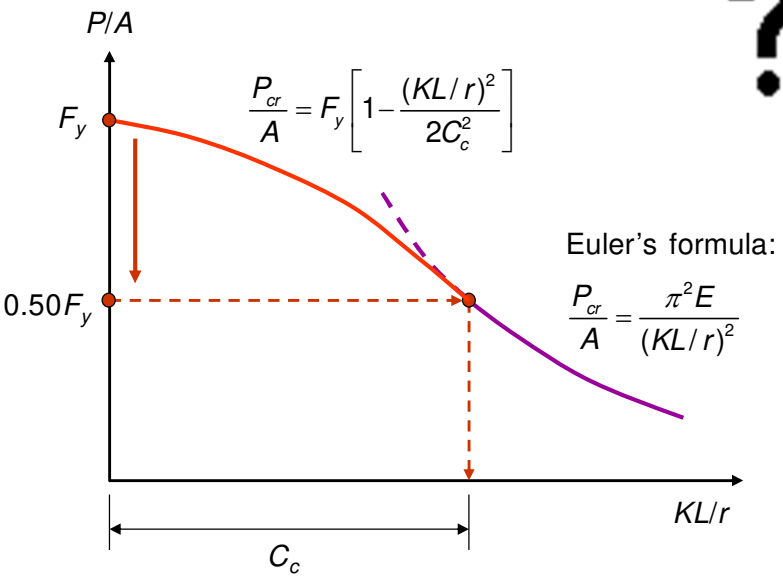
Buckling strength vs. slenderness



หน่วยแรงที่ยอมให้ขององค์อาคารรับแรงอัด



Elastic vs. Inelastic Buckling

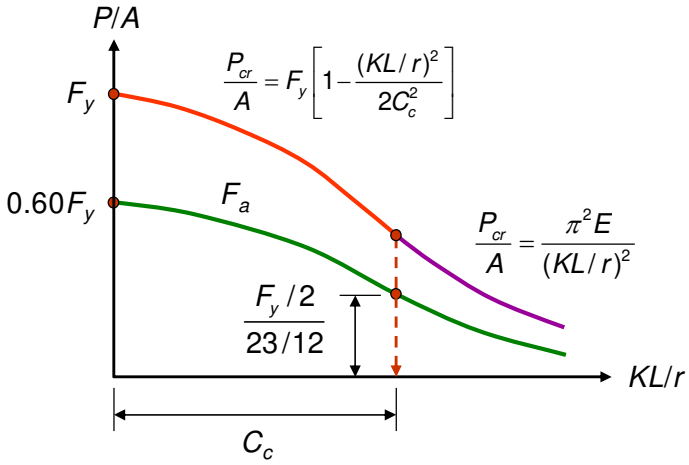


$$\text{Elastic Buckling} = 0.50F_y = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} = \frac{\pi^2 E}{C_c^2} \quad \Rightarrow \quad C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}}$$

AISC Formulas

Allowable Compressive Stress

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}}$$



Elastic Buckling:

$$\frac{KL}{r} > C_c$$

$$F_a = \frac{12\pi^2 E}{23(KL/r)^2}$$ → F.S. = 23/12

Inelastic Buckling:

$$\frac{KL}{r} < C_c$$

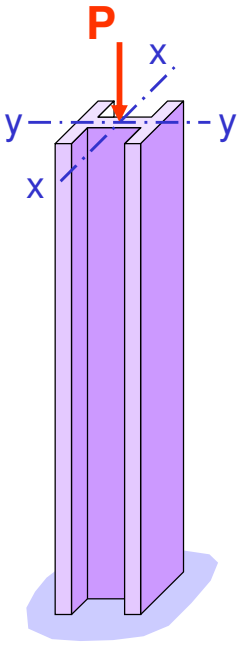
$$F_a = \frac{\left[1-\frac{(KL/r)^2}{2C_c^2}\right]F_y}{\frac{5}{3}+\frac{3(KL/r)}{8C_c}-\frac{(KL/r)^3}{8C_c^3}}$$ → F.S. Variable

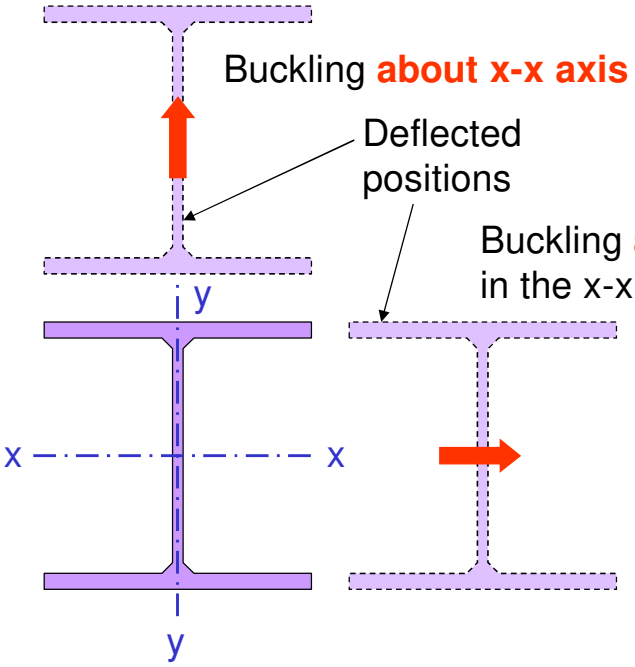
Buckling Axis

Columns normally buckle laterally (the cross-section moves sideways).

It occurs about the axis which has the highest value of ***L / r***.

This is usually the y-y axis, but both must be considered.





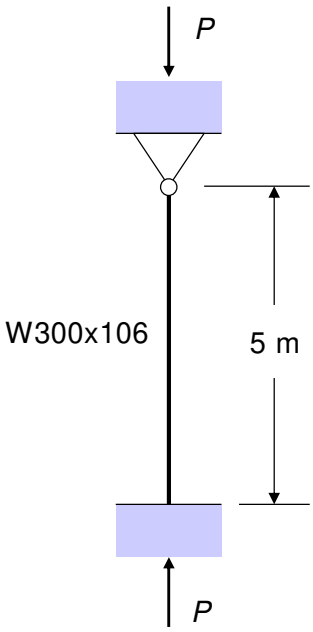
Usually, $r_x > r_y$

x-x = strong axis

y-y = weak axis

But . . .

ตัวอย่างที่ 5-2 จงพิจารณาแรงอัดที่ยอมให้ **P** ของเสา W300 × 94 มีจุดรองรับดังในรูป



วิธีทำ หน้าตัด W300×94 ก.ก./ม.(**A** = 119.8 ซม.^{2}, $\mathbf{r_y}$ = 7.51 ซม.)

จุดรองรับเป็นแบบยึดแน่น-จุดหมุน จากตาราง 5.1 ใช้ **K** = 0.8

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2(2.1\times10^6)}{2{,}500}} = 128.8$$

$$\frac{KL}{r} = \frac{0.8(500)}{7.51} = 53$$

เนื่องจาก $KL/r < C_c$ การโก่งเดาะแบบอินอิลาสติกใช้สมการ (5.8)

$$\text{F.S.} = \frac{5}{3} + \frac{3(53)}{8(128.8)} - \frac{(53)^3}{8(128.8)^3} = 1.81$$

$$F_a = \frac{\left[1 - \frac{(53)^2}{2(128.8)^2}\right]2{,}500}{1.81} = 1{,}264 \text{ kg/cm}^2$$

แรงอัดที่ยอมให้ $\mathbf{P} = \mathbf{F_a A_g} = (1.26)(119.8) = 151$ ตัน ■

ภาคผนวก ข ตารางที่ใช้ในการออกแบบองค์อาคารรับแรงอัด

KL/r from 1 to 200

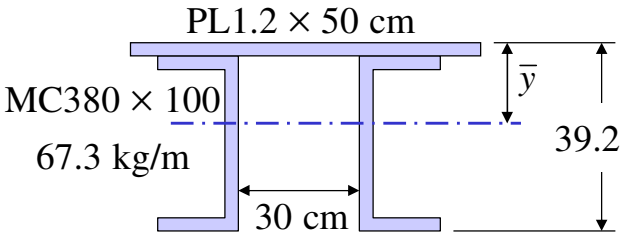
ตารางที่ ข.1

หน่วยแรงที่ยอมให้ขององค์อาคารรับแรงอัด

สำหรับเหล็กกำลังคราก 2,500 กก./ซม.^{2}

$\frac{KL}{r}$	F_a (kg/cm^2)	$\frac{KL}{r}$	F_a (kg/cm^2)	$\frac{KL}{r}$	F_a (kg/cm^2)	$\frac{KL}{r}$	F_a (kg/cm^2)	$\frac{KL}{r}$	F_a (kg/cm^2)
1	1497	41	1332	81	1072	121	729.0	161	417.2
2	1495	42	1326	82	1064	122	719.3	162	412.0
3	1492	43	1321	83	1056	123	709.6	163	407.0
4	1489	44	1315	84	1049	124	699.8	164	402.1
5	1486	45	1310	85	1041	125	689.9	165	397.2
6	1483	46	1304	86	1033	126	680.0	166	392.4
7	1480	47	1298	87	1025	127	670.0	167	387.7
8	1476	48	1292	88	1018	128	659.9	168	383.1
9	1473	49	1287	89	1010	129	649.8	169	378.6
10	1470	50	1281	90	1002	130	639.9	170	374.2
11	1466	51	1275	91	993.7	131	630.1	171	369.8
12	1463	52	1269	92	985.7	132	620.6	172	365.5
13	1459	53	1263	93	977.5	133	611.3	173	361.3
14	1456	54	1256	94	969.4	134	602.2	174	357.2
15	1452	55	1250	95	961.2	135	593.3	175	353.1

ตัวอย่างที่ 5-3 ใช้ค่าหน่วยแรงออกแบบดังแสดงในตารางที่ ข.1 พิจารณาแรงอัดที่ยอมให้ P ของเสาหน้าตัดประกอบ โดยค่า $KL = 6.0$ เมตร



วิธีทำ MC380ด100 หนัก 67.3 กก./ม. (A=85.71 ซม.^{2}, I_x=17,600 ซม.^{4}, I_y = 671 ซม.^{4}, c_y = 2.50 ซม.)

พื้นที่หน้าตัดทั้งหมด $A = 1.2(50) + 2(85.71) = 231.42$ ซม.^{2}

$$\bar{y} \text{ จากผิวบน} = \frac{1.2(50)(0.6)+2(85.71)(20.2)}{231.42} = 15.12 \text{ ซม.}$$

$$I_x = 2(17,600) + 2(85.71)(20.2\text{-}15.12)^2 + (1/12)(50)(1.2)^3 + (1.2)(50)(15.12\text{-}0.6)^2$$

$$= 52,281 \text{ ซม.}^4$$

$$I_y = 2(671) + 2(85.71)(15+2.5)^2 + (1/12)(1.2)(50)^3 = 66,339 \text{ ซม.}^4$$

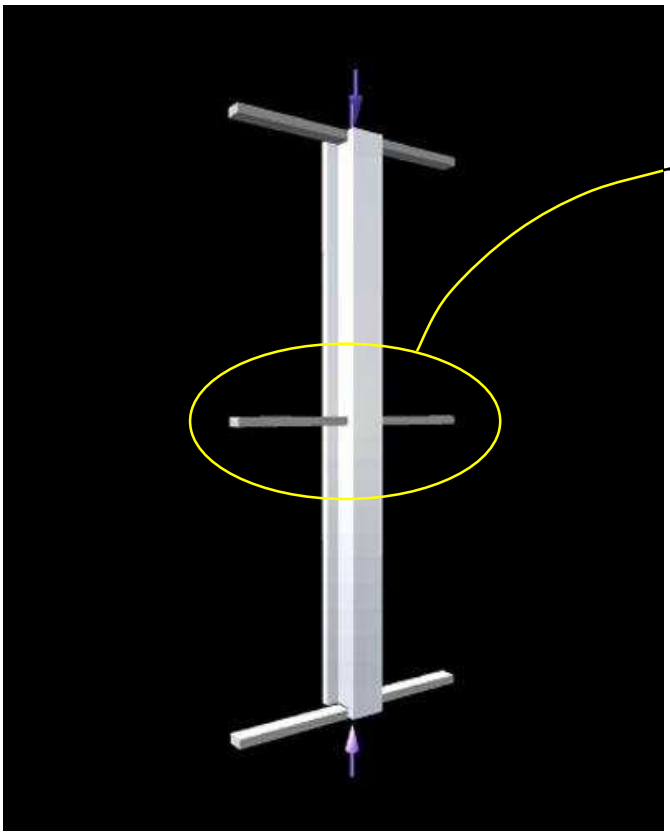
ค่าน้อยสุดของ $r = \sqrt{\frac{52,281}{231.42}} = 15.03$ ซม.

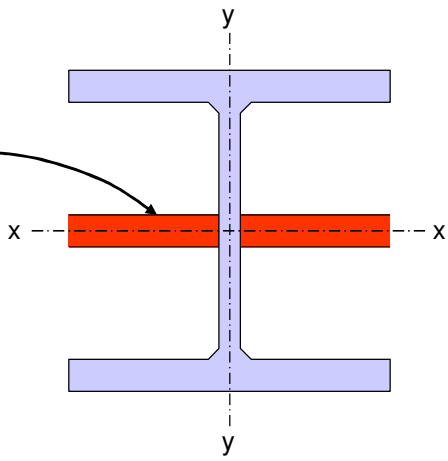
$$\frac{KL}{r} = \frac{600}{15.03} = 40$$

จากตารางที่ ข.1 $F_a = 1,337$ ก.ก./ซม.^{2}

$$P = F_a A_g = 1.337(231.42) = 309.4 \text{ ตัน}$$

การโก่งเดาะในเสาที่มีการยึดรั้งแตกต่างกันในสองทิศทาง



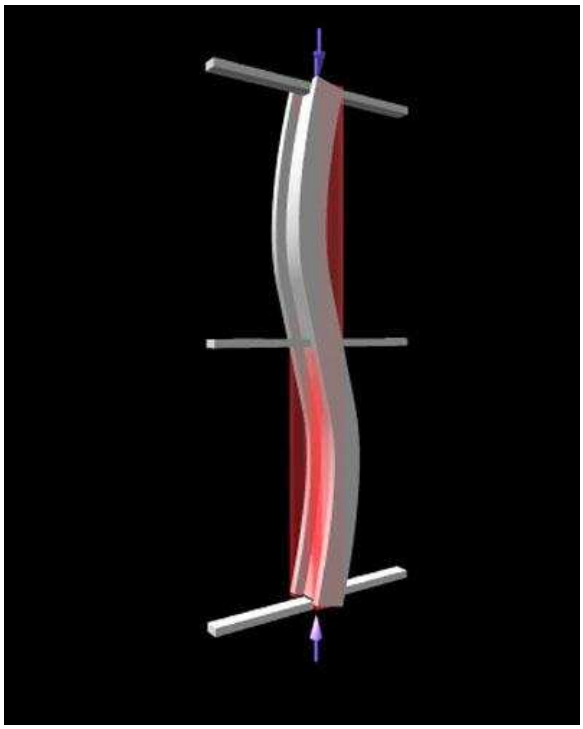


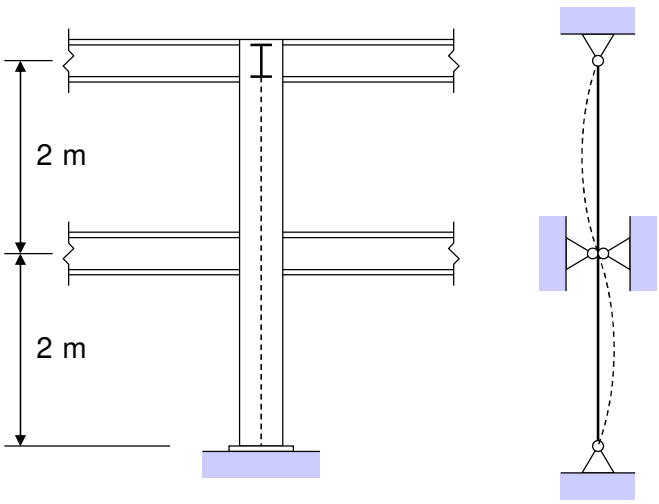
x - x = Strong axis (แกนหลัก)

y - y = Weak axis (แกนรอง)

= Lateral support against buckling about weak axis

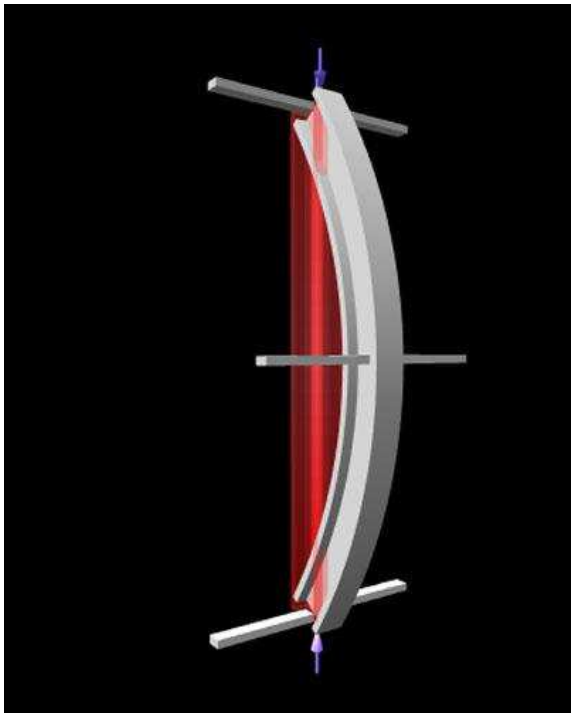
การโก่งเดาะรอบแกนรอง

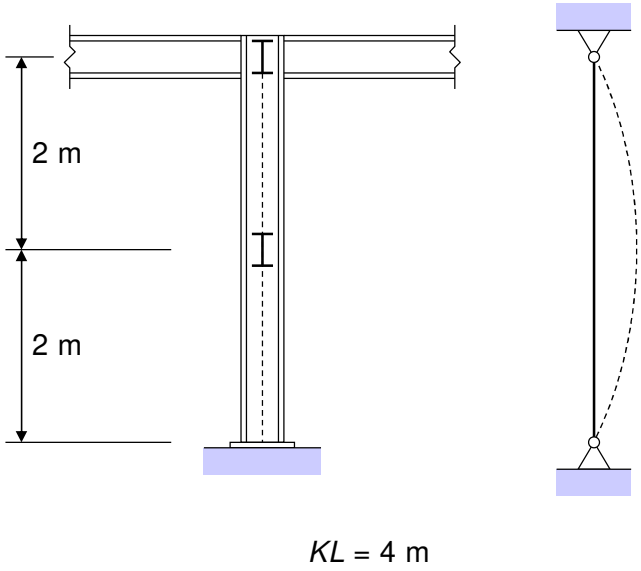




KL = 2 m

การโก่งเดาะรอบแกนหลัก



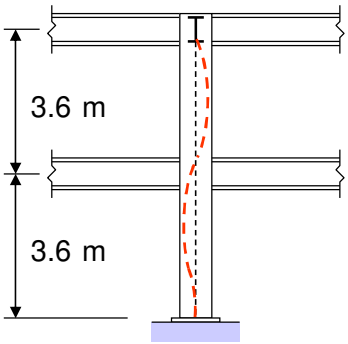


ตัวอย่างที่ 5-4 พิจารณากำลังของเสา W250×66.5 ซึ่งมีการยึดรั้งที่แตกต่างกันในแต่ละแกน คือมีความยาว 7.2 เมตรในแนวแกน **x-x** และมีความยาว 3.6 เมตรในแนวแกน **y-y** เหล็กที่ใช้เป็น A36 จุดรองรับแบบจุดหมุนที่ปลายบนและแบบยึดแน่นที่ปลายล่าง

วิธีทำ หน้าตัด W250×66.5 (**A** = 84.7 ซม.^{2}, $\mathbf{r_x}$ = 10.8 ซม., $\mathbf{r_y}$ = 6.29 ซม.)

$$\frac{KL_y}{r_y} = \frac{1(360)}{6.29} = 57$$ (เสาส่วนบน) (ควบคุม)

$$\frac{KL_x}{r_x} = \frac{0.8(720)}{10.8} = 53$$



จากตารางที่ ข.1 $\mathbf{F_a}$ = 1,238 ก.ก./ซม.^{2}

P = (1.238)(84.7) = 105 ตัน ■

End of Lecture 05