Série 2 : les suites numériques

Ex1

DEVOIR 1

1) Pour $x \in]0;1[$, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} k.x^k$$

2) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1!+2!+...+n!}{n!} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1!+2!+...+n!}{(n+1)!}$$

3) Soit (u_n) une suite bornée, vérifiant la condition :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2u_n \leq u_{n-1} + u_{n+1}$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$

4) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin 1 + \sin 2 + ... + \sin n}{n\sqrt{n}} = 0$

et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos 1 + \cos 2 + ... + \cos n}{n\sqrt{n}} = 0$

5) Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq u_n \leq 2 \text{ et } 0 \leq v_n \leq 3$$

On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n.v_n = 6$.

Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) ?

6) Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) = 0$$

Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

7) On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 0$,

$u_1 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = \frac{1}{3}(1 + u_{n+1} + u_n^3)$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) Etablir que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Ex2

Devoir 6 : partie C Almoufid

Partie C : étude de suites croisées

On se propose d'étudier les deux suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = a$, $y_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{px_n + qy_n}{p+q} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{qx_n + py_n}{p+q}$$

Où a, b, p, q sont des réels strictement positifs tels que $0 < a < b$ et $0 < q < p$

1) a) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n - y_n$ et $x_n + y_n$, et en déduire une expression de x_n et y_n en fonction de a, b, p, q et n.

b) Déduire du 1)a) que les suites (x_n) et (y_n) convergent vers une limite commune $\ell = \frac{a+b}{2}$

2) Retrouver le résultat du 1)b) en établissant que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

Ex3

(Devoir 6 partie D)

Partie D : Calcul de la limite d'une somme à l'aide des suites adjacentes

On se propose de calculer la limite de $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$ lorsque $n \to +\infty$. Pour $n \geq 1$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}},\ U_n = 2\sqrt{n} - S_n \quad \text{et} \quad V_n = 2\sqrt{n+1} - S_n$$

1) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

2) Montrer que les suites $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes, de limite commune $L \geq 1$.

3) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$

4) Déduire de ce qui précède la valeur de :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$$

ajtfham academy

EX4

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$u_n = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

1) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$

2) a) Vérifier que pour tout entier $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad \text{et que} \quad \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\quad u_n < 2$

c) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

EX5

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$u_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq \sqrt{n}$

2) Préciser la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

EX6

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^n \geq n+$

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k.2^k} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n.2^n}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ convergent et ont la même limite.

EX7

EXERCICE 49

Soit a un réel supérieur ou égal à 1 et (x_n) la suite numérique définie par :

$$x_0 = a \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{x_n}{1+(n+1)x_n^2}$$

1) On suppose dans cette question que $a=1$.

Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad x_n = \frac{1}{n+1}$$

2) On suppose maintenant que $a>1$.

a) Montrer que la suite (x_n) est décroissante et minorée.

b) En déduire que la suite (x_n) est convergente puis déterminer sa limite.

3) On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = \frac{x}{1+(n+1)x^2}$$

a) Montrer que la fonction f_n est croissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]$.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\ 0 < x_n \leq \frac{1}{n+1}$

c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k} = (k+1)x_k$$

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n-1+\frac{1}{x_1}} \leq x_n \leq \frac{1}{n+1}$$

e) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$.

ajtfham academy