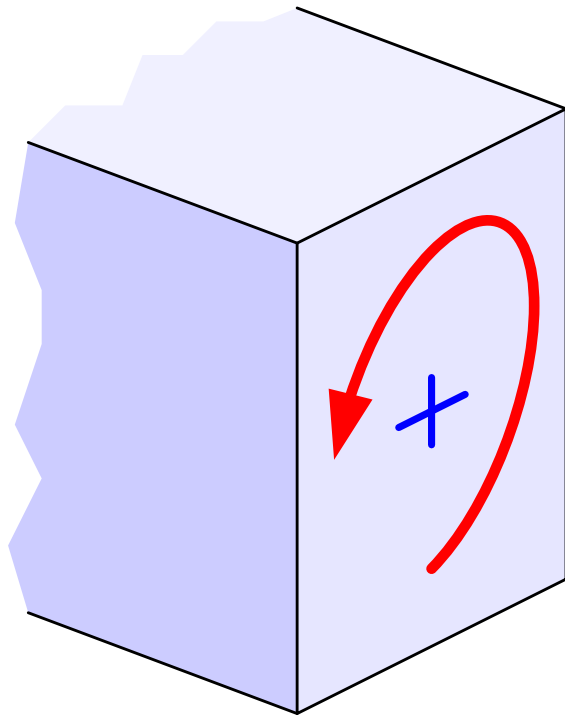


9

Reinforced Concrete Design II

Torsion Design



- Torsional effects
- Torsion in plain concrete
- Cracking Torque T_{cr}
- Torsion Reinforcement
- Design Example

Mongkol JIRAVACHARADET

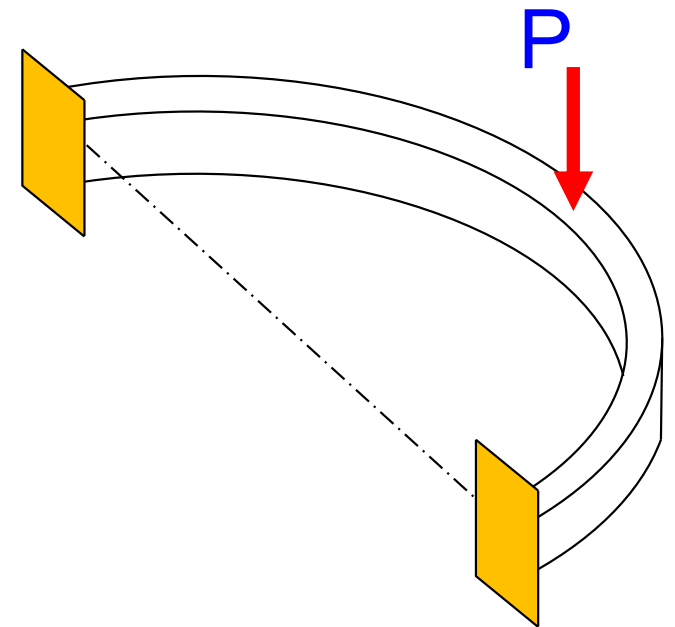
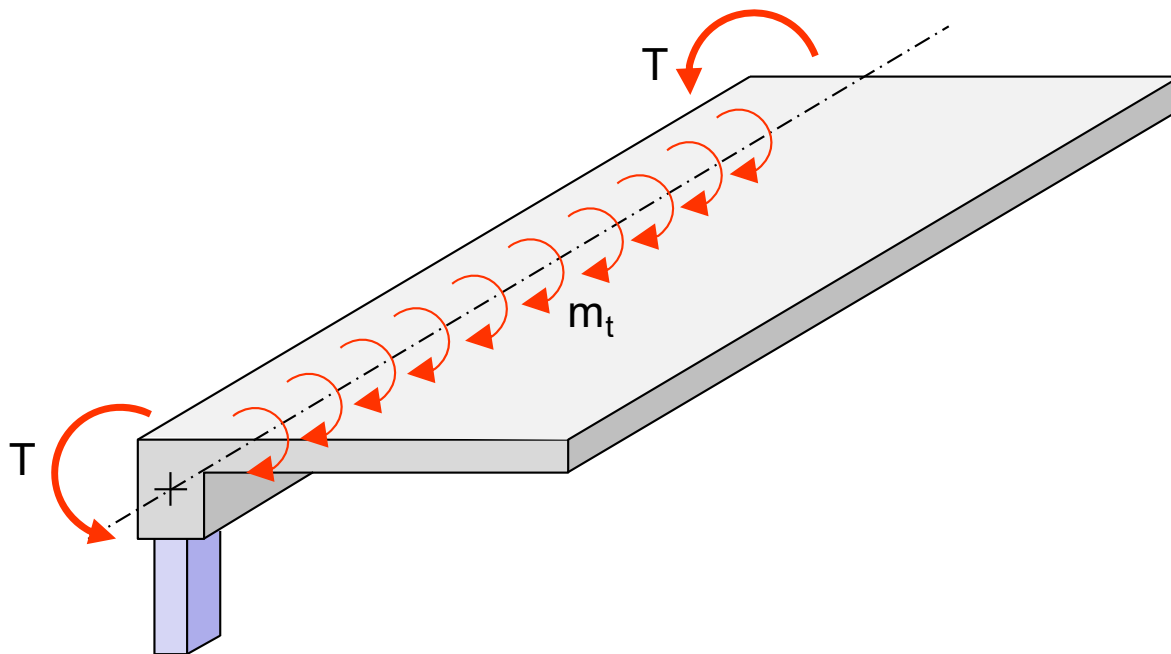
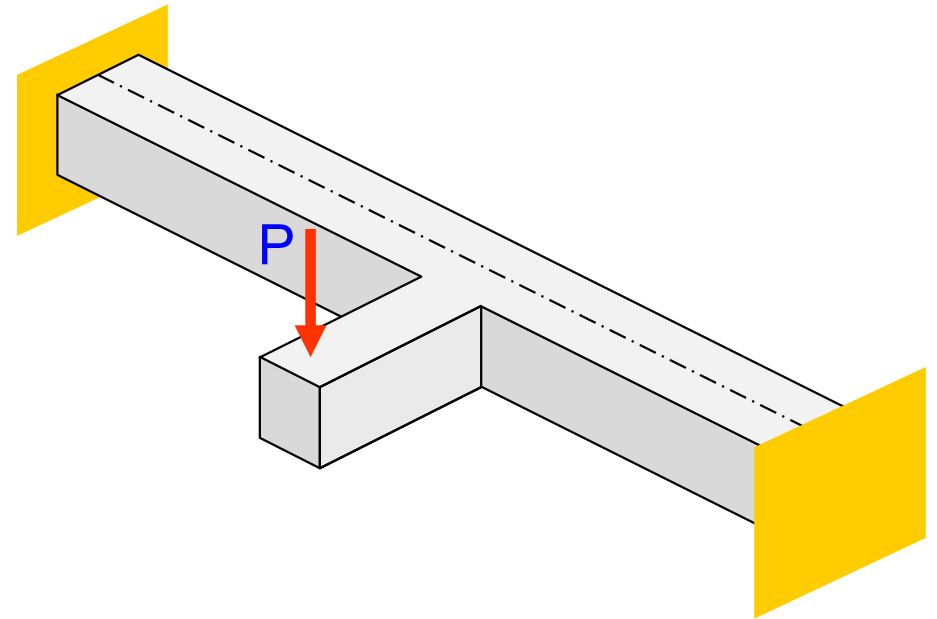
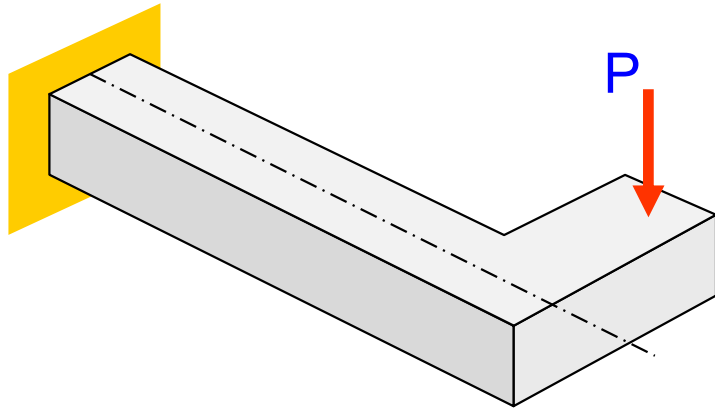
SURANAREE

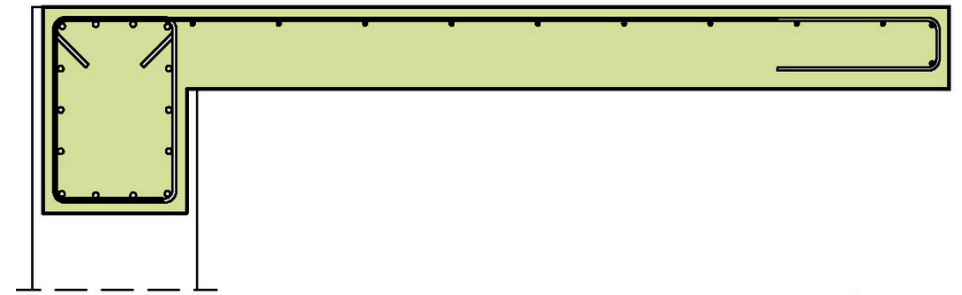
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

INSTITUTE OF ENGINEERING

SCHOOL OF CIVIL ENGINEERING

Eccentrically Loaded Beams





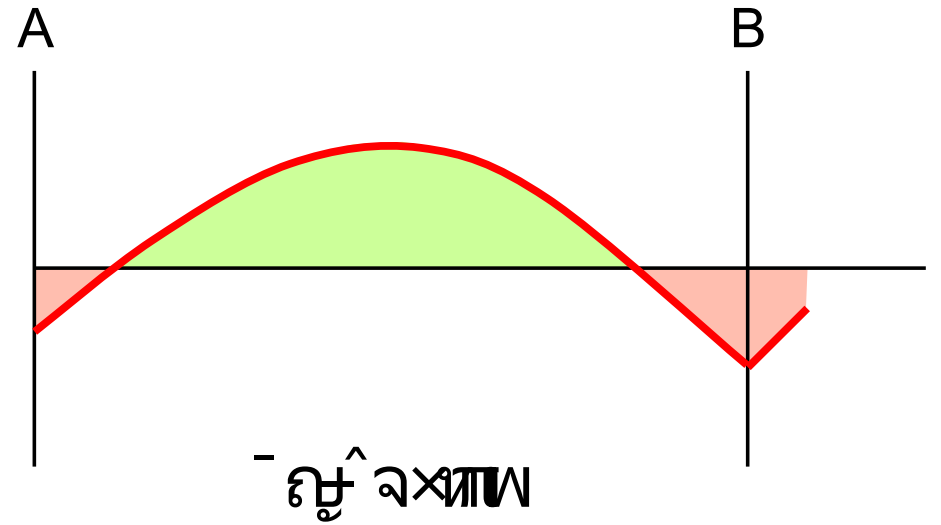
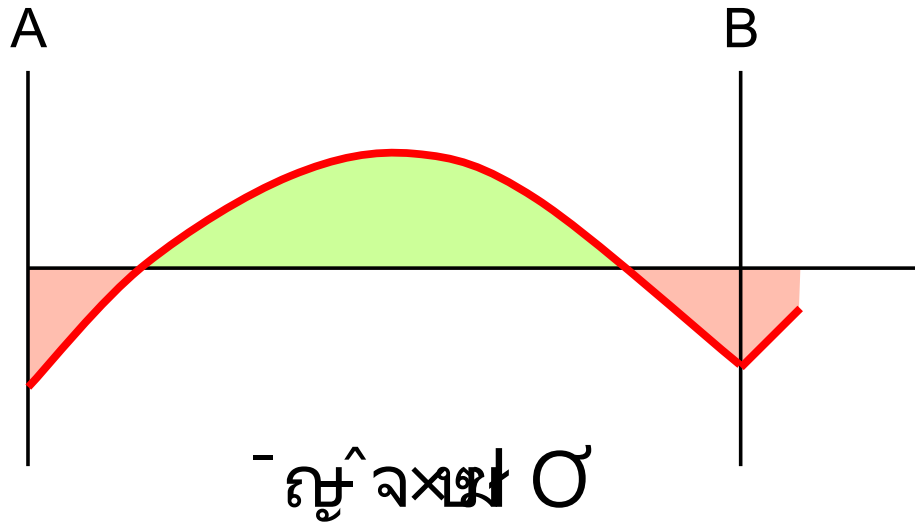
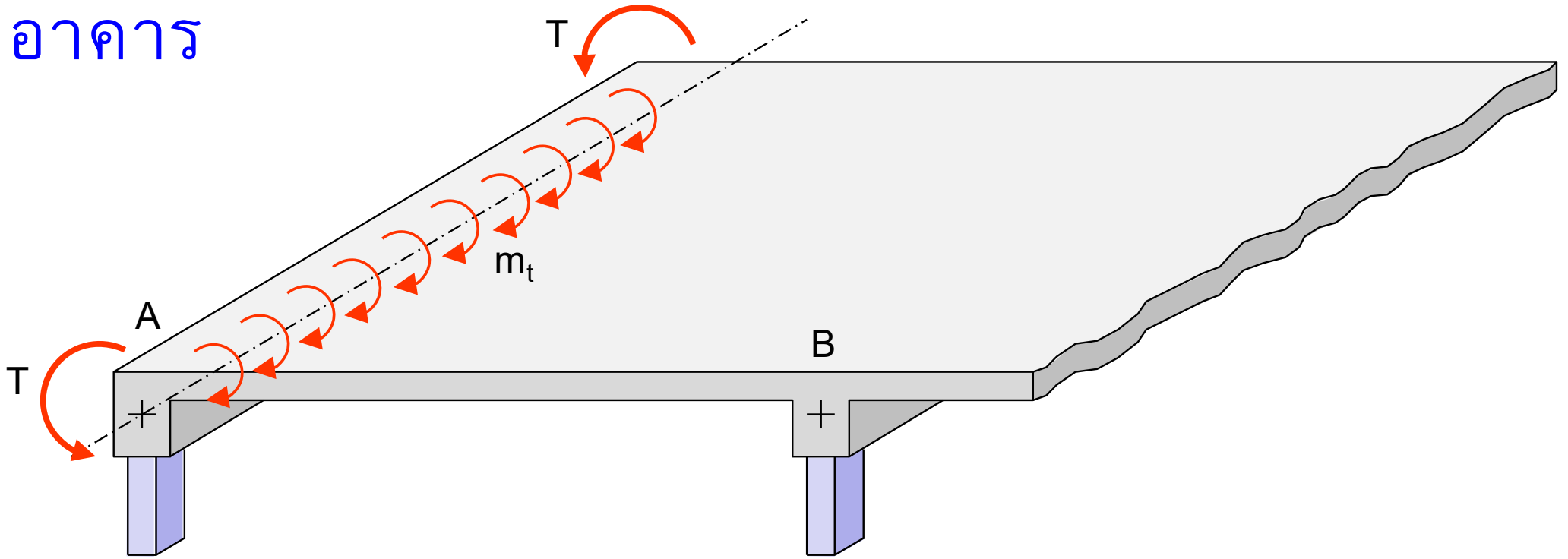
Beam under torsion

When a beam supports a slab (or when it carries another beam only on its one side), it is subjected to direct torsion.



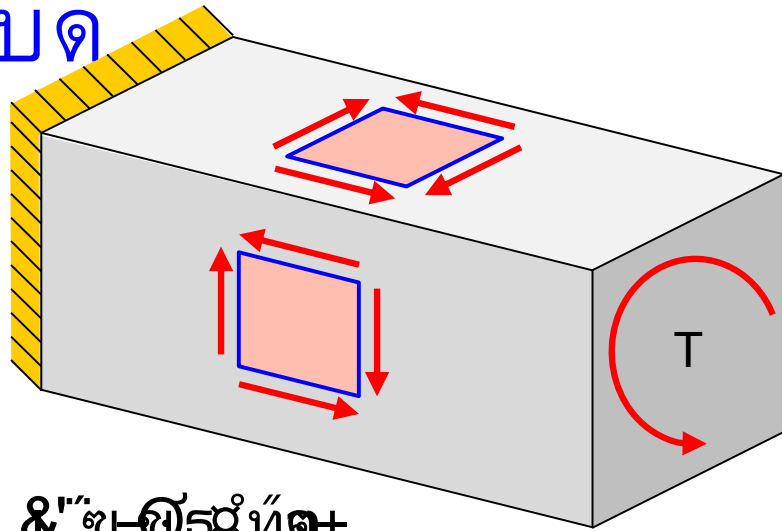
การบิดในคานขอบ

อาคาร

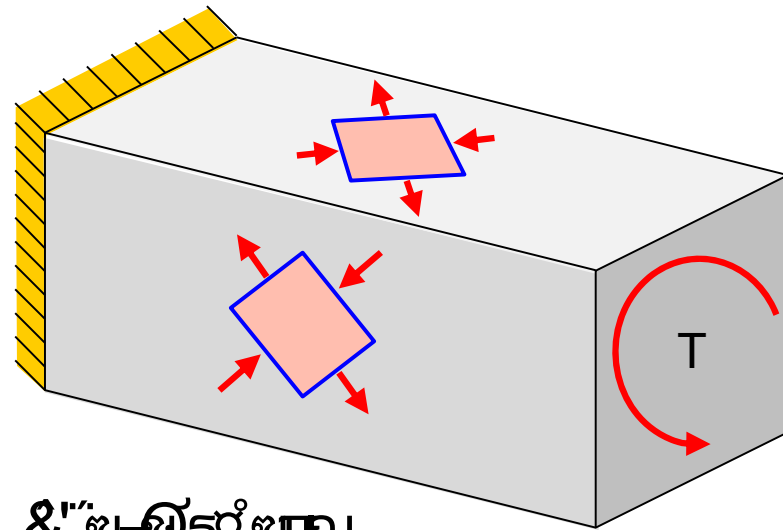


หน่วยแรงและการแตกร้าวจาก

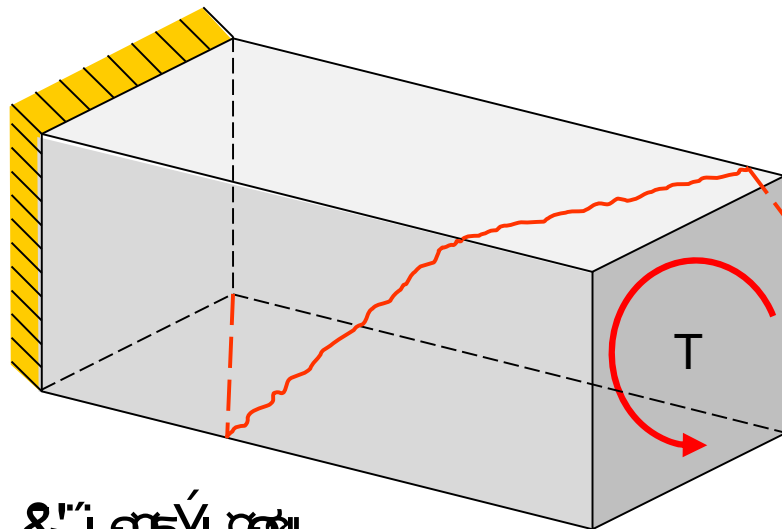
การบิด



&"๓-๐๕๐๓๓

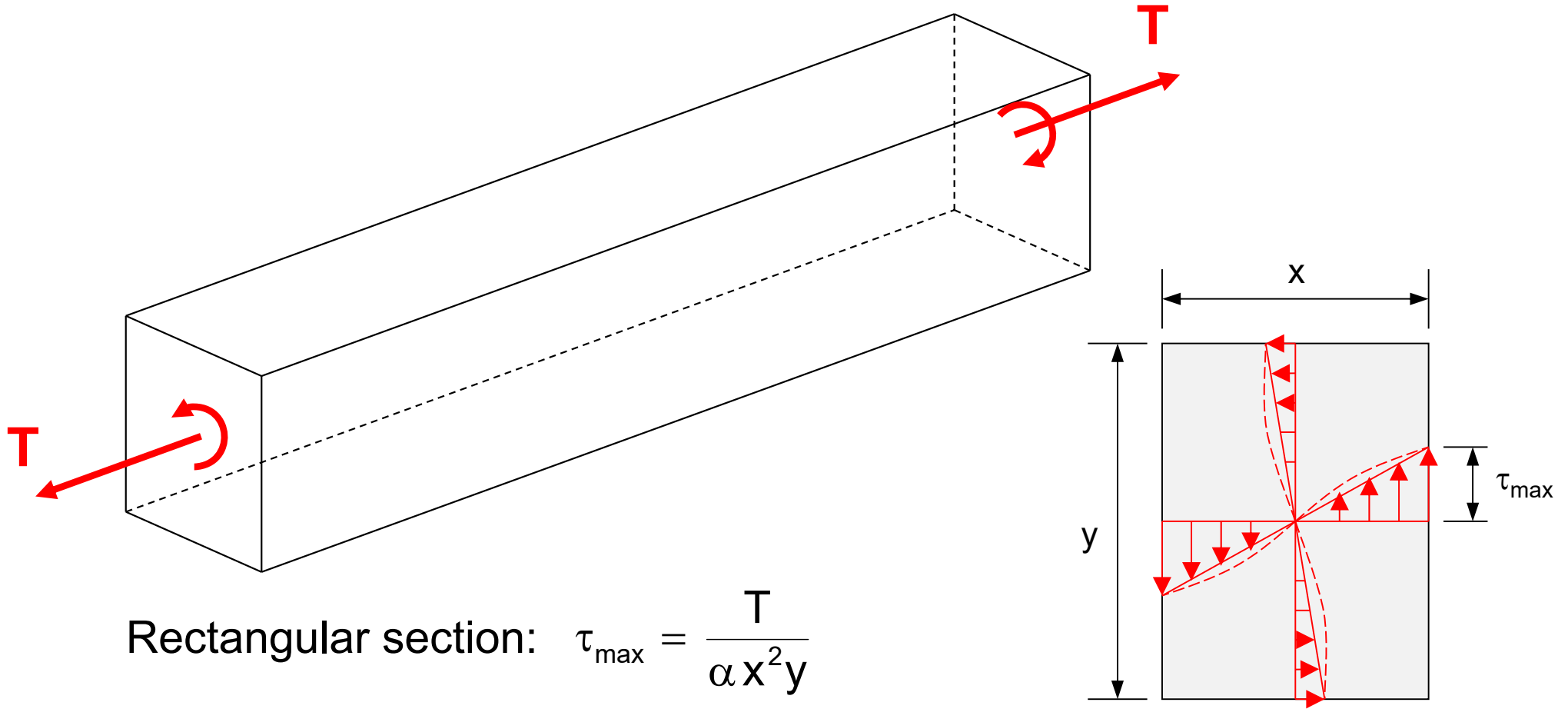


&"๓-๐๕๐๓๓



&"๓-๐๕๐๓๓

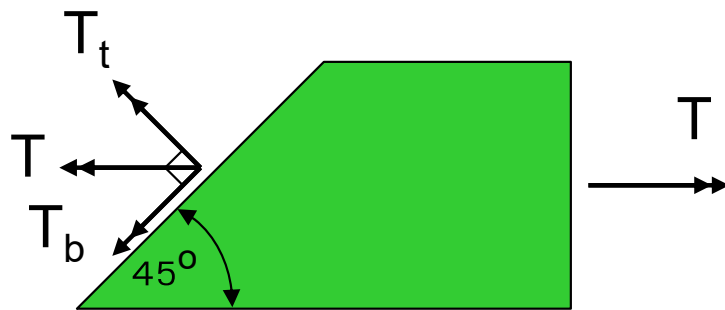
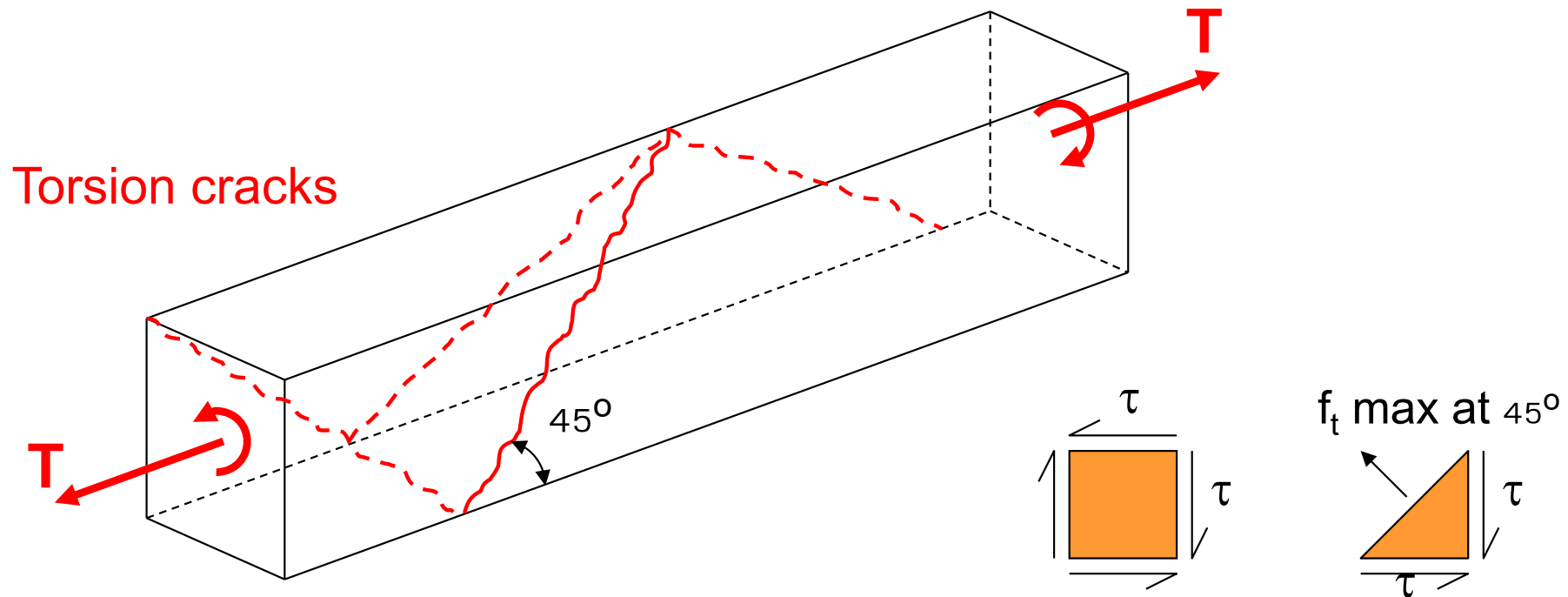
Torsion in plain concrete members



y/x	1.0	1.5	2.0	3.0	5.0	∞
α	0.208	0.219	0.246	0.267	0.290	1/3

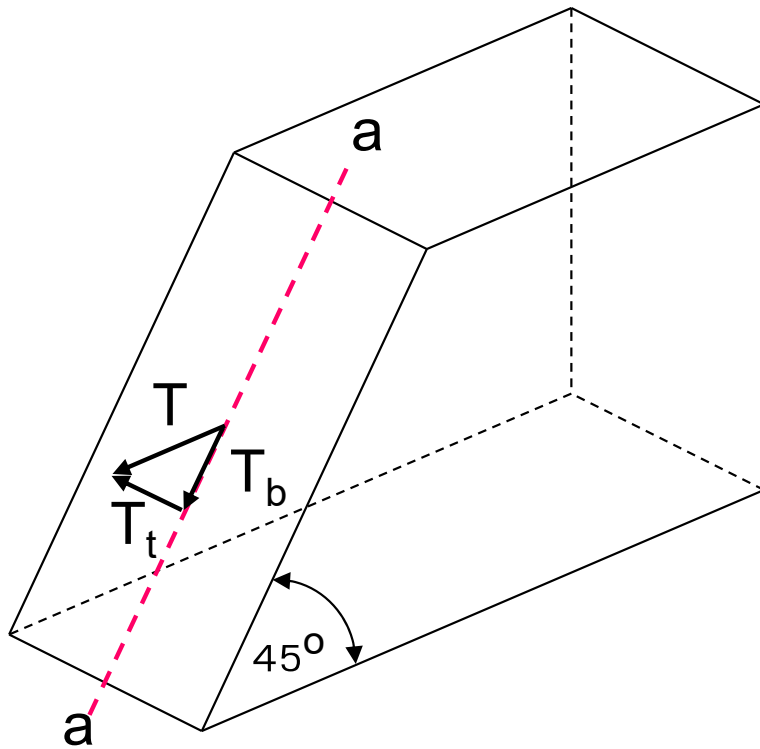
Cracking Torque

Plain concrete rectangular section in torsion

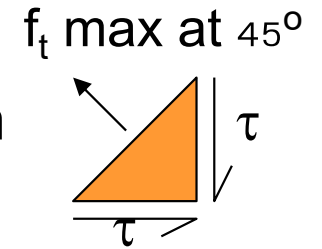


Bending: $T_b = T \cos 45^\circ$

Torsion: $T_t = T \cos 45^\circ$



Concrete crack occurs when



$$f_{t,max} = 0.80f_r = 0.80 \times 2.0\sqrt{f'_c} = 1.6\sqrt{f'_c}$$

f_r = Modulus of rupture

Sectional Modulus: $S_{a-a} = I_{a-a} / (x/2) = \frac{1}{12} \left(\frac{y}{\cos 45^\circ} \right) x^3 \left(\frac{2}{x} \right) = \frac{x^2 y}{6 \cos 45^\circ}$

$$f_{t,max} = \frac{T_{b,cr}}{S_{a-a}} = T_{cr} \cos 45^\circ \frac{6 \cos 45^\circ}{x^2 y} = \frac{3T_{cr}}{x^2 y} = 1.6\sqrt{f'_c}$$

Cracking Torque:

$$T_{cr} = \frac{x^2 y}{3} (1.6\sqrt{f'_c})$$

4406 กำลังเฉือนและกำลังบิดร่วมกัน

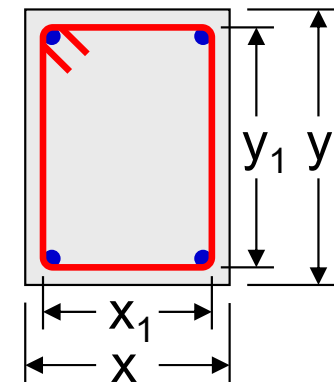
ไม่ต้องคิดผลของการบิดเมื่อ $T_u \leq \phi T_{cr} / 4 \leq \phi(0.13 \sqrt{f'_c} \Sigma x^2 y)$

ตัวคูณลดกำลังสำหรับการบิด $\phi = 0.85$

ออกแบบหน้าตัดให้มีกำลังบิด : $T_n \geq T_u / \phi$

กำลังบิดของคานเสริมเหล็ก : $T_n = T_c + T_s$

กำลังบิดที่รับโดยคอนกรีต : $T_c = \frac{0.21 \sqrt{f'_c} \Sigma x^2 y}{\sqrt{1 + \left(\frac{0.4 V_u}{C_t T_u} \right)^2}}$, $C_t = \frac{bd}{\Sigma x^2 y}$



กำลังบิดที่รับโดยเหล็กเสริม : $T_s = \frac{\alpha_t x_1 y_1 A_t f_y}{s}$

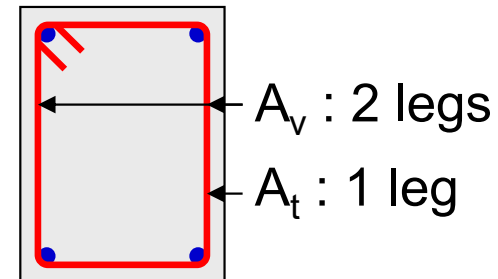
T_s ต้องไม่เกิน $4T_c$

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_s}{\alpha_t x_1 y_1 f_y}$$

$$\alpha_t = 0.66 + 0.33 \frac{y_1}{x_1} \leq 1.50$$

ปริมาณเหล็กลูกตั้ง(เหล็กปลอก)น้อยที่สุด

$$\frac{A_{v+t}}{s} = \frac{A_v}{s} + 2\left(\frac{A_t}{s}\right) \geq 3.5 \frac{b}{f_y}$$



ปริมาณเหล็กเสริมตามยาว A_l ซึ่งกระจายอยู่โดยรอบเหล็กปลอก

$$A_l = 2A_t \left(\frac{x_1 + y_1}{s} \right) \quad \dots(44-19)$$

หรือจาก

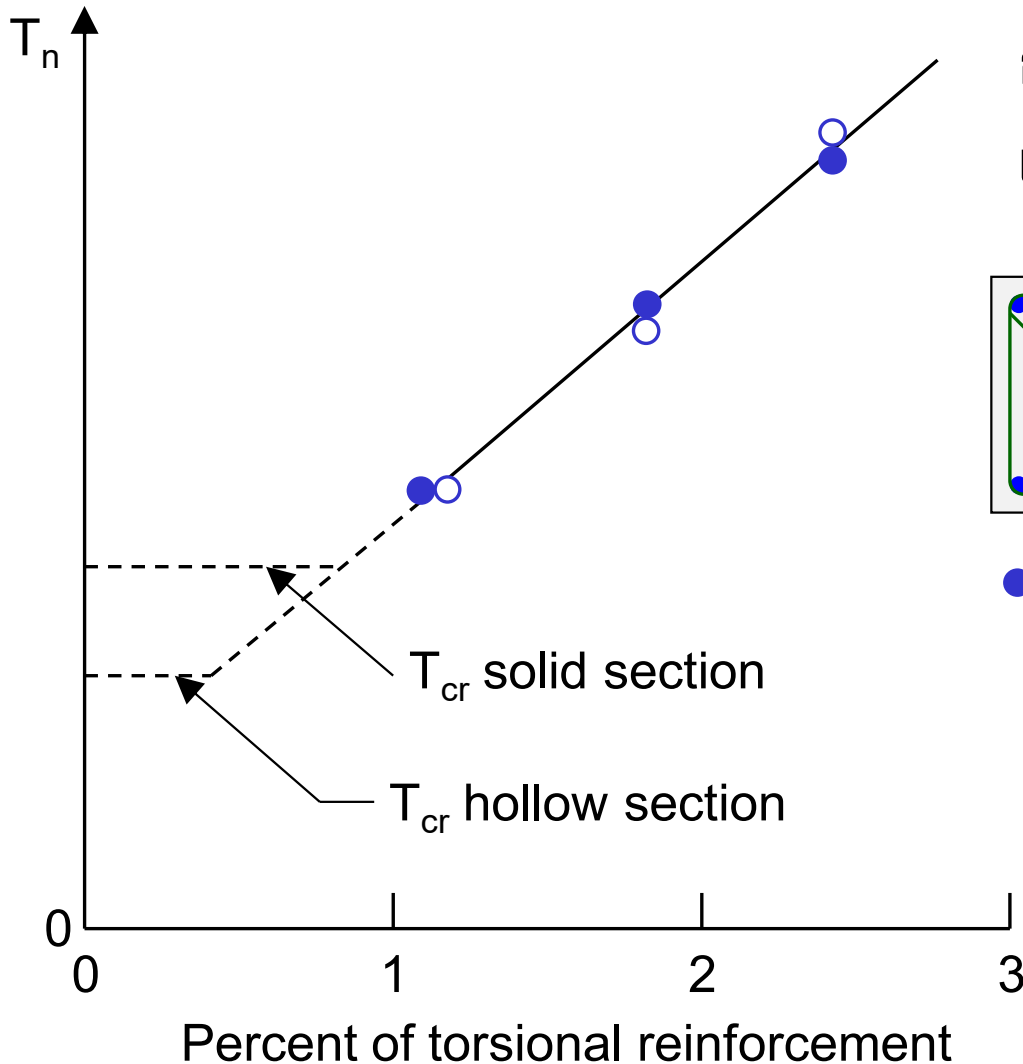
$$A_l = \left[\frac{28xs}{f_y} \left(\frac{T_u}{T_u + \frac{V_u}{3C_t}} \right) - 2A_t \right] \left(\frac{x_1 + y_1}{s} \right) \quad \dots(44-20)$$

โดยให้ใช้ค่าที่มากกว่า ค่า A_l ที่คำนวณจากสมการ (44-20) ไม่จำเป็นต้องเกิน

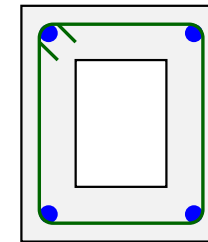
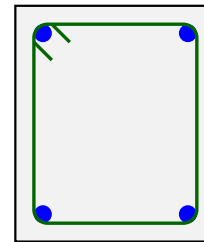
ค่าที่ได้จากการแทน $2A_t$ ด้วย $\frac{3.5b_w d}{f_y}$

Torsional Strength of Reinforced Concrete

เปรียบเทียบกำลังบิดของหน้าตัดสี่เหลี่ยมตันและกลวงที่มีขนาดเท่ากันตามปริมาณเหล็กเสริมตามยาวและเหล็กปลอกที่เปลี่ยนแปลงไป



กำลังบิดประลัยของหน้าตัดตันและกลวงมีค่าเท่ากันที่ขนาดและปริมาณเหล็กเสริมเท่ากัน



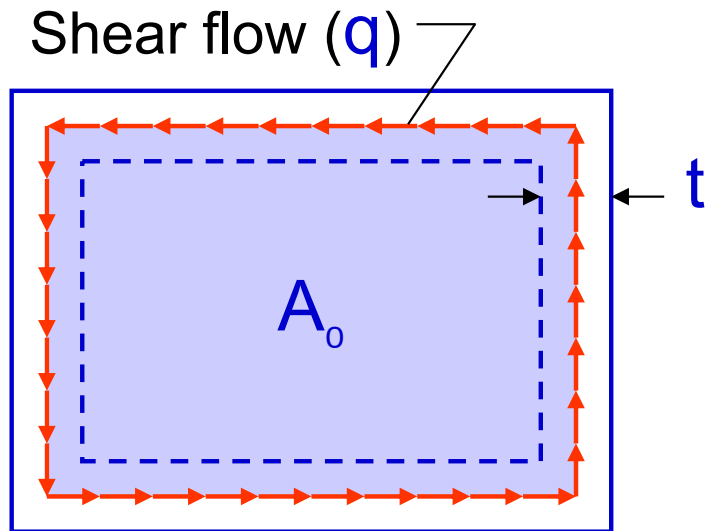
● Solid

○ Hollow

ดังนั้นกำลังต้านทานการบิดจึงมาจากขอบนอกของหน้าตัดที่มีเหล็กเสริม

Shear Stress in Thin-walled Tube

คานรับแรงบิดจะถูกคิดว่าเป็นท่อผนังบางโดยเฉลี่ยแกนกลางคอนกรีต



$$\text{Shear flow: } q = \frac{T}{2A_0} \text{ kg/cm}$$

มีค่าคงที่บนเส้นรอบรูปที่กลางความหนาผนังต่อหน่วยแรงเฉือนจากการบิด $\tau_t = q / t$:

$$\tau_t = \frac{T}{2A_0 t}$$

Cracking Torque (T_{cr})

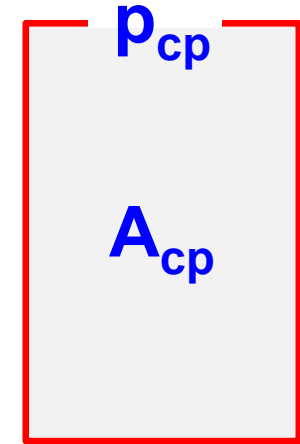
การแตกร้าวเกิดขึ้นเมื่อ τ มีค่าถึง $1.1\sqrt{f'_c}$ $\rightarrow \tau_{cr} = \frac{T_{cr}}{2A_0 t} = 1.1\sqrt{f'_c}$

ดังนั้น โมเมนต์บิดแตกร้าว $T_{cr} = 1.1\sqrt{f'_c}(2A_0 t)$

ACI กำหนดให้แทนค่าความหนาผนังท่อบาง $t = 0.75A_{cp}/p_{cp}$ และ
พื้นที่ล้อมรอบ $A_0 = 2A_{cp}/3$ เมื่อ

p_{cp} คือเส้นรอบรูปภายนอกของหน้าตัดคอนกรีต

A_{cp} คือพื้นที่ซึ่งล้อมรอบโดย p_{cp}



ดังนั้น โมเมนต์บิดแตกเร็ว $T_{cr} = 1.1\sqrt{f'_c} \left(2 \times \frac{2A_{cp}}{3} \times \frac{0.75A_{cp}}{p_{cp}} \right)$

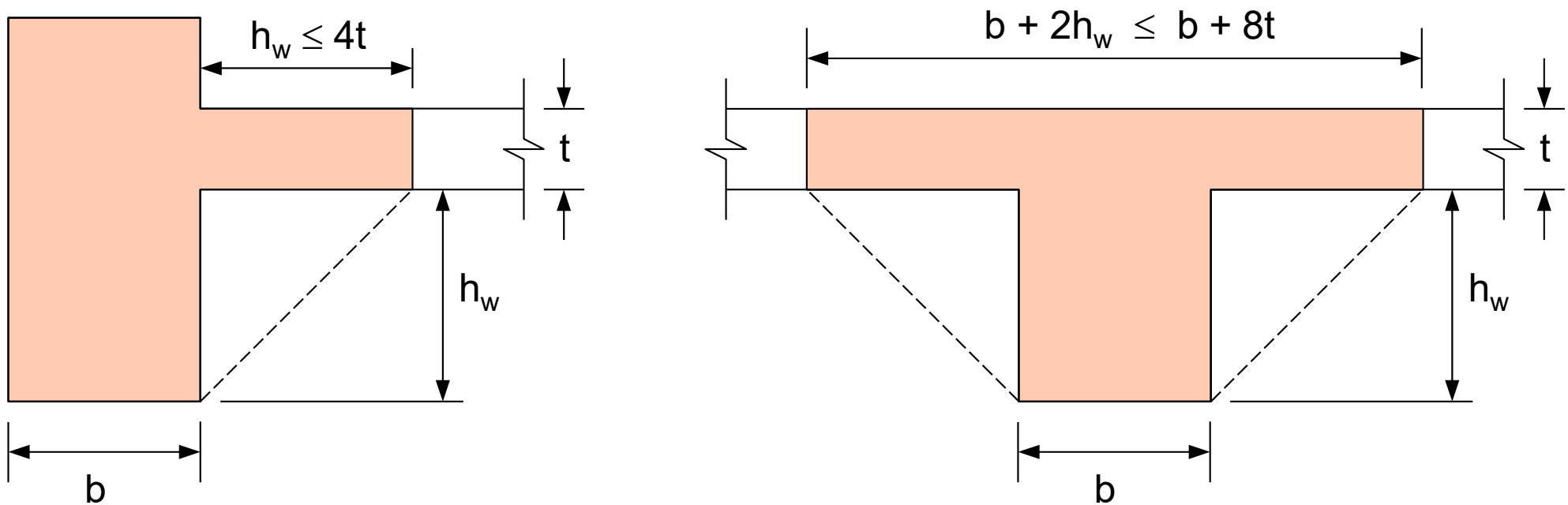
$$T_{cr} = 1.1\sqrt{f'_c} \left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \right)$$

ไม่ต้องคิดผลของการบิดเมื่อ $T_u \leq \phi T_{cr} / 4 \leq \phi (0.27\sqrt{f'_c}) \left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \right)$

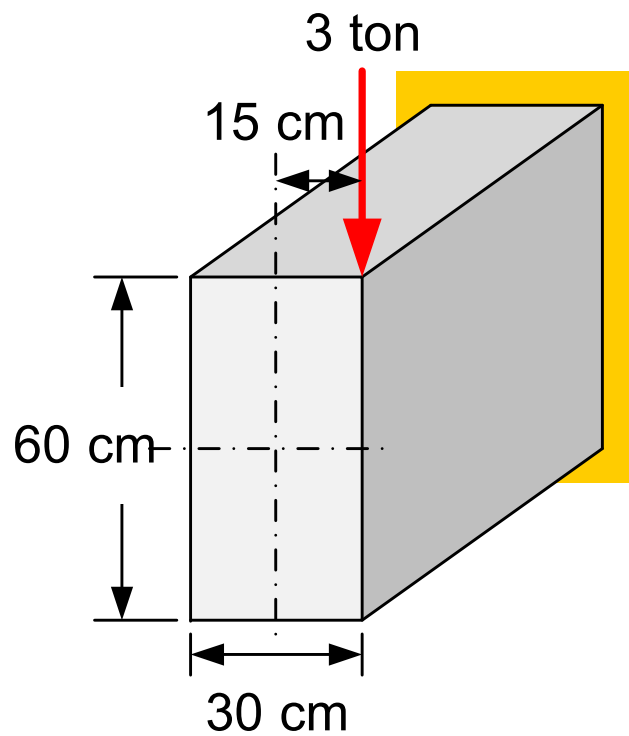
ตัวคูณลดกำลังสำหรับการบิด $\phi = 0.85$

ส่วนของพื้ที่นำมาคิดรวมกับคานเพื่อช่วยรับการบิด

สำหรับหน้าตัดรูปตัว T และ L ที่เกิดจากการหล่อคานและพื้เป็นเนื้อเดียวกัน เราอาจคิดความกว้างปีกประสิทธิภาพมาช่วยรับการบิดได้ โดยใช้ระยะที่มากกว่าของคานด้านบนหรือใต้พื้แต่ต้องไม่เกินสี่เท่าความหนาพื้ดังแสดงในรูป



ตัวอย่างที่ 9.1 คานยื่นรับน้ำหนักบรรทุกทุกประลัย 3 ตันที่มุมหน้าตัดห่างจากศูนย์กลางหน้าตัด 15 ซม. ตรวจสอบดูว่าจำเป็นต้องคิดผลของการบิดในการออกแบบหรือไม่ กำหนด $f'_c = 240$ กก./ชม.²



เส้นรอบรูปหน้าตัด $p_{cp} = 2(60+30) = 180$ ซม.

พื้นที่หน้าตัด $A_{cp} = (60)(30) = 1,800$ ชม.²

$$\begin{aligned} \text{ขีดจำกัดโมเมนต์บิด } \phi T_{cr} / 4 &= \phi (0.27 \sqrt{f'_c}) \left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \right) \\ &= 0.85 (0.27 \sqrt{240}) \left(\frac{1800^2}{180} \right) \\ &= 63,997 \text{ กก.-ชม.} = 0.64 \text{ ตัน-เมตร} \end{aligned}$$

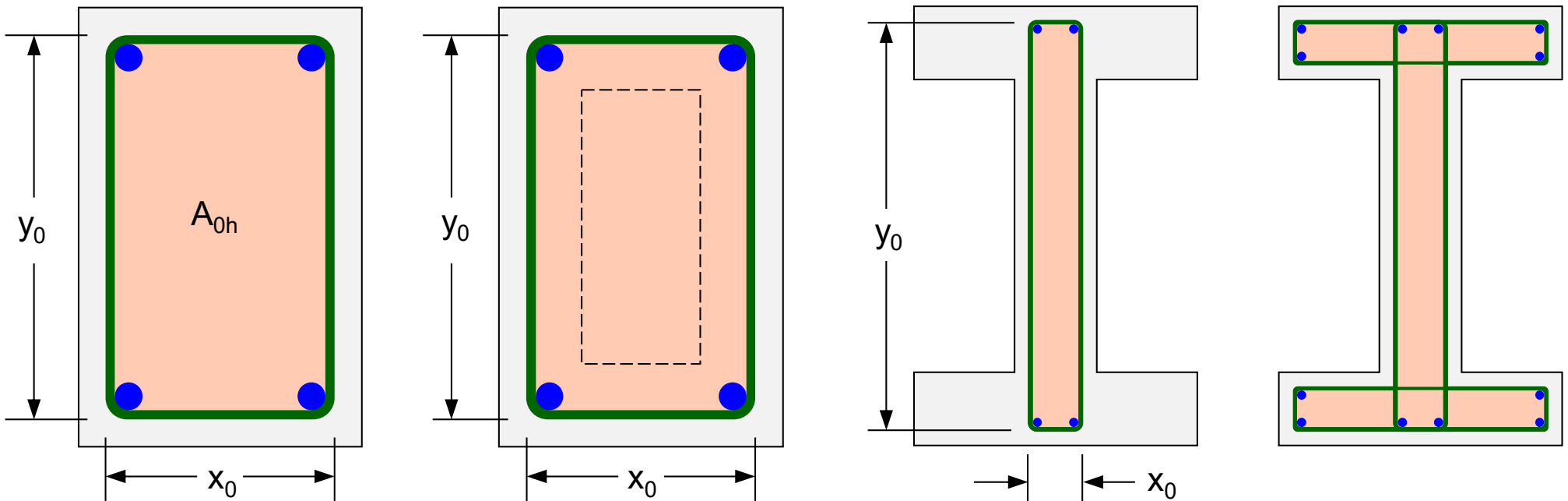
โมเมนต์บิดที่มากกระทำ $T_u = (3)(0.15) = 0.45$ ตัน-เมตร < 0.64 ตัน-เมตร

OK

ดังนั้นไม่ต้องคิดผลของแรงบิดในคาน

กำลังบิดของคานคอนกรีตเสริม

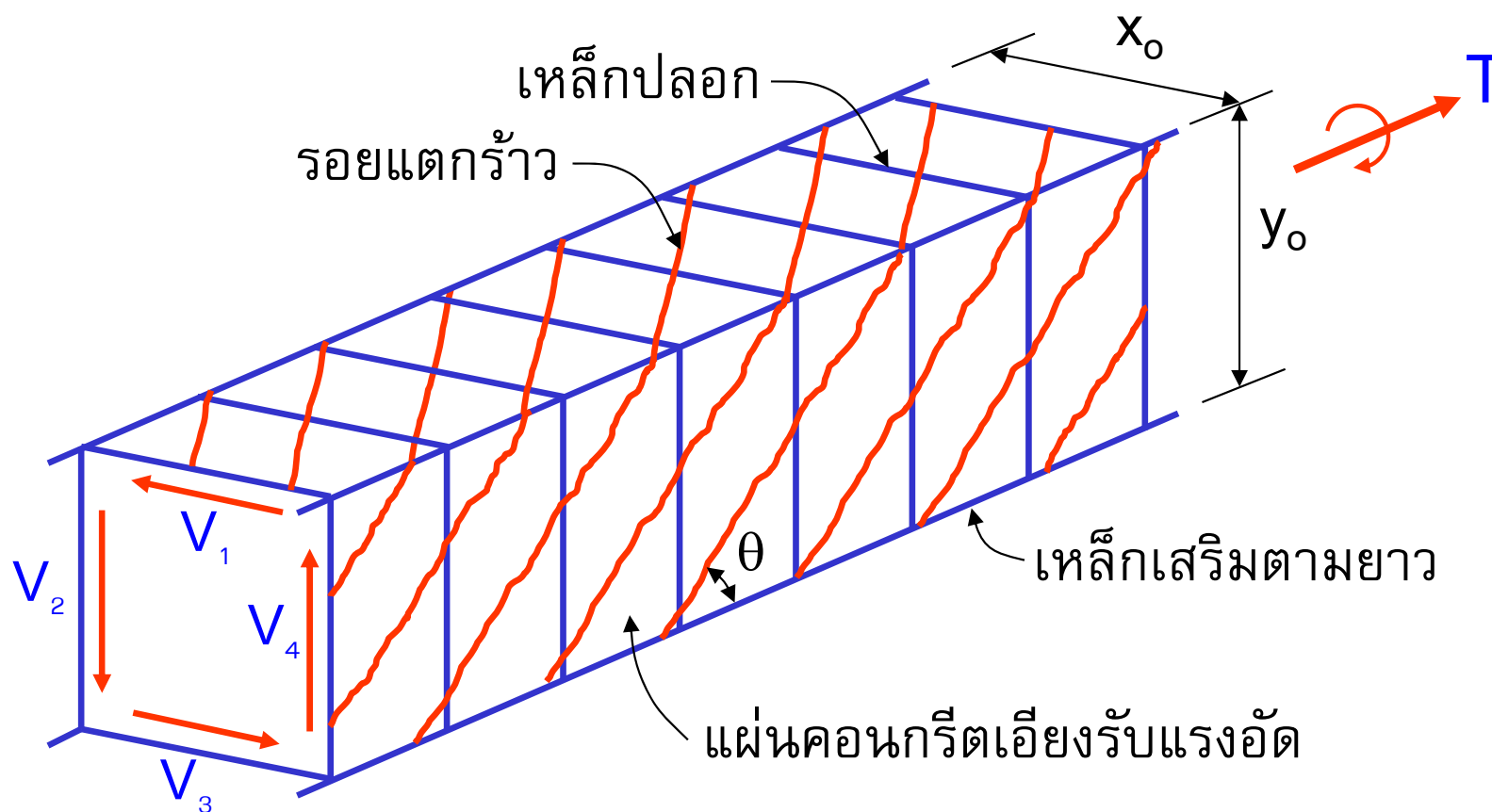
เหล็ก
หลังเกิดการแตกร้าวจากการบิด คอนกรีตเปลือกนอกที่ห่อหุ้มอยู่จะกะเทาะออกไป โมเมนต์บิดจะถูกต้านทานโดยเหล็กปลอก เหล็กนอน และคอนกรีตภายในเหล็กปลอก



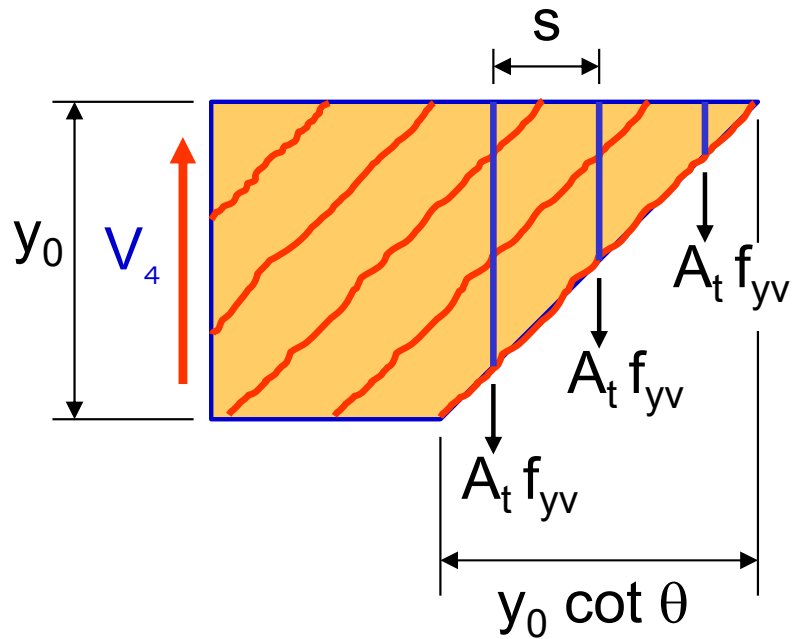
พื้นที่ A_{0h} ที่ใช้คำนวณจะใช้พื้นที่ที่ถูกโอบล้อมโดยเหล็กปลอกวัดตามแนวศูนย์กลางเหล็กปลอก ในกรณีของหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า $A_{0h} = x_0 y_0$ และเส้นรอบรูป $p_h = 2(x_0 + y_0)$ เมื่อ x_0 และ y_0 คือระยะระหว่างศูนย์กลางเหล็กปลอกด้านสั้นและด้านยาวตามลำดับ

Space Truss Analogy

การไหลเฉือน q ในผนังท่อจะถูกแบ่งออกเป็นแรงเฉือน V_1 V_2 V_3 และ V_4 บนแต่ละด้านของโครงถักสามมิติดังในรูป



พิจารณาแรงเฉือนบนด้านหนึ่ง: V_4

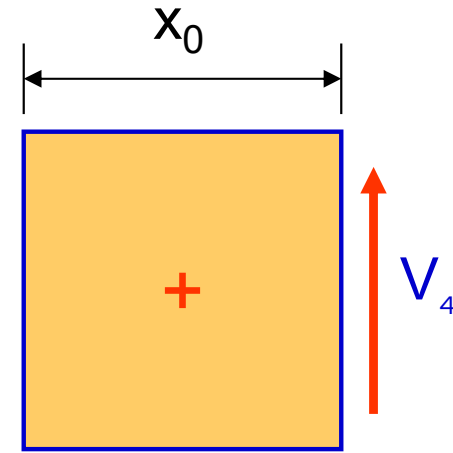


แรงเฉือน $V_4 = n A_t f_{yv}$

จำนวนปลอกในระนาบเฉือน :

$$n = \frac{y_0 \cot 45^\circ}{s} = \frac{y_0}{s}$$

$$V_4 = \frac{A_t f_{yv} y_0}{s}$$



โมเมนต์บิดจากแรงเฉือน V_4 :

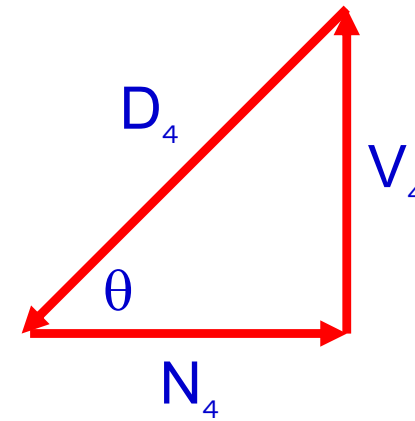
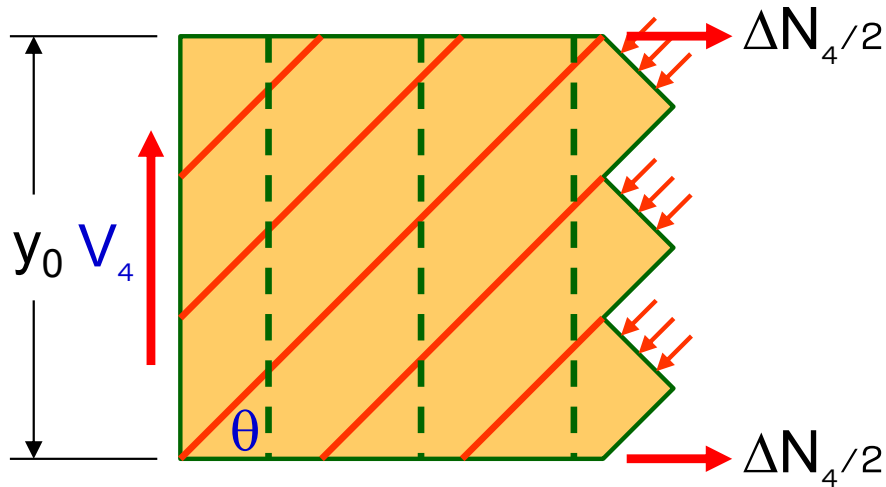
$$T_4 = \frac{V_4 x_0}{2}$$

$$T_4 = \frac{A_t f_{yv} x_0 y_0}{2s} = T_1 = T_2 = T_3$$

โมเมนต์บิดทั้งหมด : $T_n = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$

$$T_n = \frac{2A_t f_{yv} x_0 y_0}{s} = \frac{2A_t f_{yv} A_{oh}}{s}$$

พิจารณาแรงในแผ่นแรงอัดเอียง

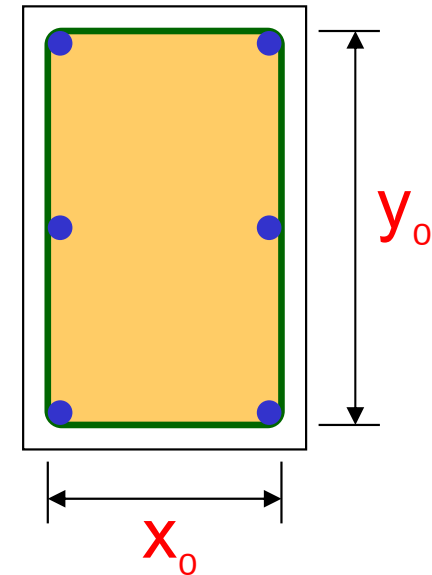


แรงดึงในเหล็กเสริมตามยาว: $\Delta N_4 = V_4 \cot \theta$

$$\Delta N_4 = \frac{A_t f_{yv} y_0}{s} = \Delta N_2$$

$$\Delta N_1 = \Delta N_3 = \frac{A_t f_{yv} x_0}{s}$$

แรงดึงทั้งหมด: $\Delta N = \Delta N_1 + \Delta N_2 + \Delta N_3 + \Delta N_4$



$$A_l f_{yl} = \frac{A_t f_{yv}}{s} 2(x_0 + y_0) = \frac{A_t f_{yv} p_h}{s} \rightarrow \text{perimeter of stirrup } 2(x_0 + y_0)$$

Combined Shear and Torsion

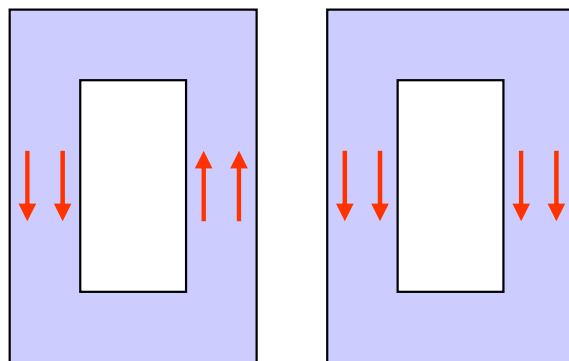
หน่วยแรงเฉือนจากการเฉือน: $\tau_v = \frac{V}{b_w d}$

หน่วยแรงเฉือนจากการบิด: $\tau_t = \frac{T}{2A_0 t}$

เมื่อ $t = 0.75A_{cp}/p_{cp}$
และ $A_0 = 2A_{cp}/3$

หน่วยแรงเฉือนร่วมกระทำ:

Hollow section

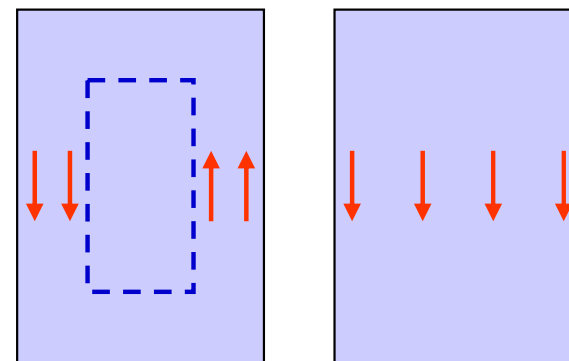


Torsional stresses

Shear stresses

$$\frac{V_u}{b_w d} + \frac{T_u p_h}{1.7 A_{0h}^2}$$

Solid section



Torsional stresses

Shear stresses

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A_{0h}^2}\right)^2}$$

Maximum Shear + Torsion Stress

SDM

หน้าตัดต้องมีขนาดเพียงพอที่จะทำให้หน่วยแรงเฉือนร่วมกระทำมีค่าไม่เกินขีดจำกัด

(a) For solid sections

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A_{0h}^2}\right)^2} \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 2.12 \sqrt{f'_c} \right)$$

(b) For hollow sections

$$\frac{V_u}{b_w d} + \frac{T_u p_h}{1.7 A_{0h}^2} \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 2.12 \sqrt{f'_c} \right)$$

For reinforced concrete $V_c = 0.53 \sqrt{f'_c}$

- ▶ เมื่อโมเมนต์บิด T_u มีค่าเกิน $\phi T_{cr}/4$ ให้ออกแบบรับโมเมนต์บิดเพื่อให้

$$\phi T_n \geq T_u$$

ในการคำนวณ T_n โมเมนต์บิดทั้งหมดจะถูกรับโดย เหล็กปลอกและเหล็กเสริมตามยาว โดยให้ $T_c = 0$

- ▶ ปริมาณเหล็กปลอกคำนวณโดย $T_n = \frac{2A_o A_t f_{yv}}{s}$ เมื่อ $A_o = 0.85A_{oh}$

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_n}{2A_o f_{yv}} = \frac{T_u}{2\phi A_o f_{yv}}$$

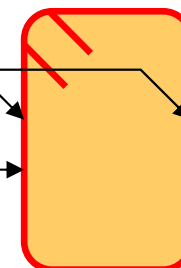
- ▶ พื้นที่เหล็กเสริมตามยาวที่ต้องใส่เพิ่มขึ้นเพื่อต้านทานการบิด $A_l = \frac{A_t}{s} p_h \left(\frac{f_{yv}}{f_{yl}} \right)$

- ▶ ปริมาณเหล็กปลอกที่ต้องการสำหรับแรงเฉือนและโมเมนต์บิด

$$\text{Total} \left(\frac{A_{v+t}}{s} \right) = \frac{A_v}{s} + 2 \frac{A_t}{s}$$

2 legs A_v

1 leg A_t



Minimum Torsion Reinforcement

SDM

▶ ปริมาณเหล็กปลอกน้อยที่สุด $(A_v + 2A_t) = 0.199\sqrt{f'_c} \frac{b_w s}{f_{yv}} \geq 3.5 \frac{b_w s}{f_{yv}}$

▶ ระยะห่างเหล็กปลอกมีค่าไม่เกินค่าที่น้อยกว่าของ $p_h/8$ หรือ 30 ซม.

▶ พื้นที่เหล็กเสริมตามยาวน้อยที่สุด $A_{l,min} = \frac{1.33\sqrt{f'_c}}{f_{yl}} A_{cp} - \frac{A_t}{s} p_h \frac{f_{yv}}{f_{yl}}$

โดยที่ A_t/s จะต้องไม่น้อยกว่า $1.8 b_w/f_{yv}$

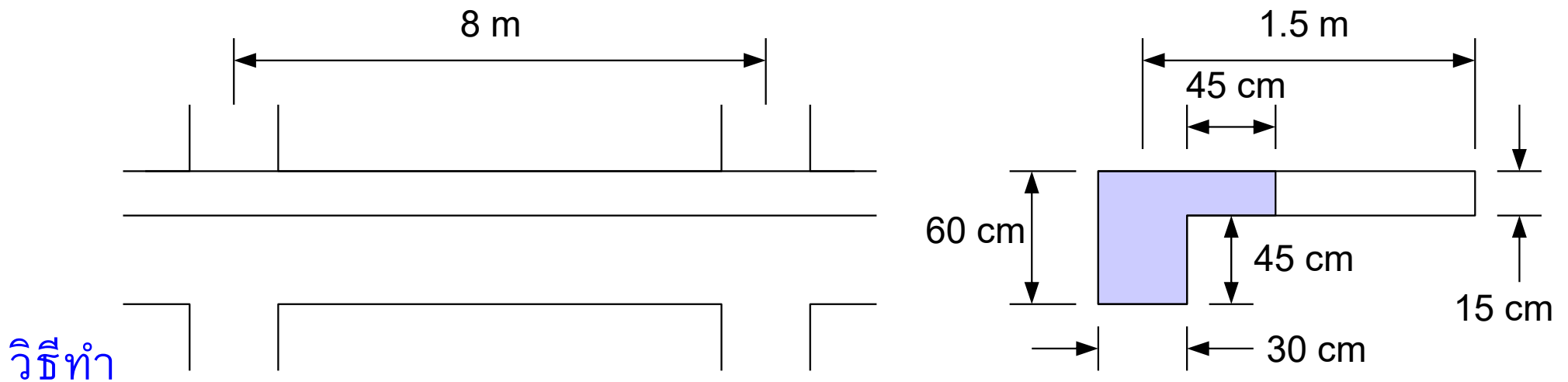
→ เสริมเหล็กตามยาวรับการบิดกระจายโดยรอบภายในเหล็กปลอก โดยมีระยะห่างมากที่สุด 30 ซม.

→ เสริมเหล็กตามยาวอย่างน้อยหนึ่งเส้นที่แต่ละมุมของเหล็กปลอก

→ ใช้เหล็กเสริมตามยาว $\phi \geq 1/24$ เท่าระยะห่างเหล็กปลอก ≥ 10 ม.ม.

ตัวอย่างที่ 9.2 การออกแบบสำหรับแรงบิดและแรงเฉือน

คานาช่องยาว 8 เมตรดังแสดงในรูป รองรับพื้นยื่น 1.5 เมตร โดยหล่อเป็นเนื้อเดียวกันรับน้ำหนักบรรทุกทุกจร 1.2 ตัน/เมตรบนศูนย์กลางคานา บวกกับอีก 200 กก./เมตรที่กระจายสม่ำเสมอบนพื้น ความลึกประสิทธิภาพของคานาเท่ากับ 54 ซม. และระยะจากผิวคานาถึงศูนย์กลางเหล็กปลอก 4 ซม. กำหนด $f'_c = 280$ กก./ชม.² และ $f_y = 4,000$ กก./ชม.² จงออกแบบเหล็กเสริมรับแรงบิดและแรงเฉือน



วิธีทำ

1. คำนวณแรง

ภายใน

$$\begin{aligned} \text{น้ำหนักบรรทุกทุกบนพื้น } w_u &= 1.4(0.15)(1.5)(2,400) + 1.7(200)(1.5) \\ &= 1,266 \text{ กก./เมตร} \end{aligned}$$

$$\text{ระยะเยื้องศูนย์กลาง} = 1.5/2 = 0.75 \text{ เมตร}$$

$$\begin{aligned} \text{น้ำหนักบรรทุกทุกบ้นคาน } w_u &= 1.4(0.6)(0.3)(2,400) + 1.7(1,200) \\ &= 2,645 \text{ กก./เมตร} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แรงเฉือนที่ผิวเสา } V_u &= (1.266 + 2.645) \times 8 / 2 \\ &= 15.6 \text{ ตัน} \end{aligned}$$

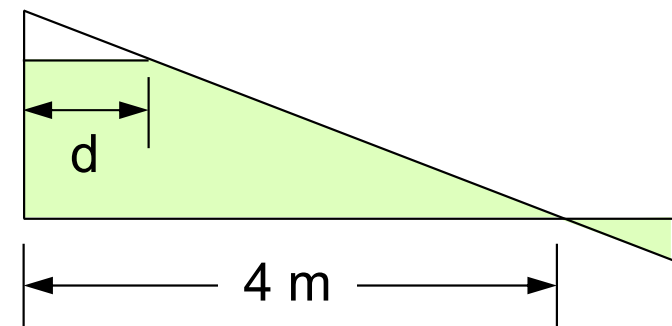
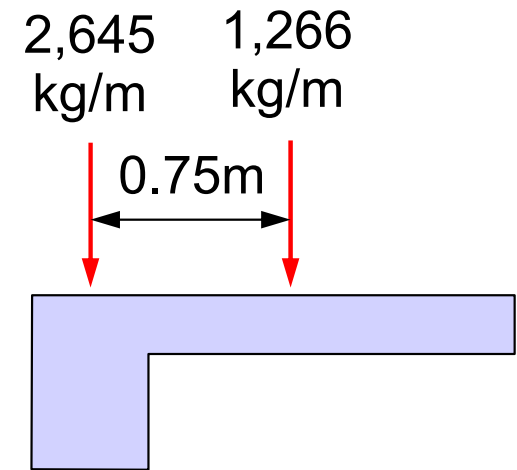
$$\begin{aligned} \text{แรงบิดที่ผิวเสา } T_u &= (1.266)(0.75) \times 8 / 2 \\ &= 3.8 \text{ ตัน} \end{aligned}$$

$$\text{โมเมนต์ดัด } M_u = (1.266 + 2.645) \times 8^2 / 10 = 25.0 \text{ ตัน-เมตร}$$

ที่หน้าตัดวิกฤตที่ระยะ $d = 54$ ซม. จากผิวเสา:

$$V_u = 15.6(3.46/4) = 13.5 \text{ ตัน}$$

$$T_u = 3.8(3.46/4) = 3.3 \text{ ตัน}$$



2. ออกแบบเหล็กเสริมรับการ

ดัด

$$R_n = \frac{M_u}{\phi b d^2} = \frac{25 \times 10^5}{0.9 \times 30 \times 54^2} = 31.8 \text{ ksc}$$

$$\rho = \frac{0.85 f'_c}{f_y} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2R_n}{0.85 f'_c}} \right) = 0.0086$$

$$[\rho_{\min} = 0.0035] < \rho < [\rho_{\max} = 0.0229] \quad \text{OK}$$

$$A_{\ell, \text{flexure}} = \rho b d = 0.0086 \times 30 \times 54 = 13.9 \text{ cm}^2$$

3. ตรวจสอบโมเมนต์บิด

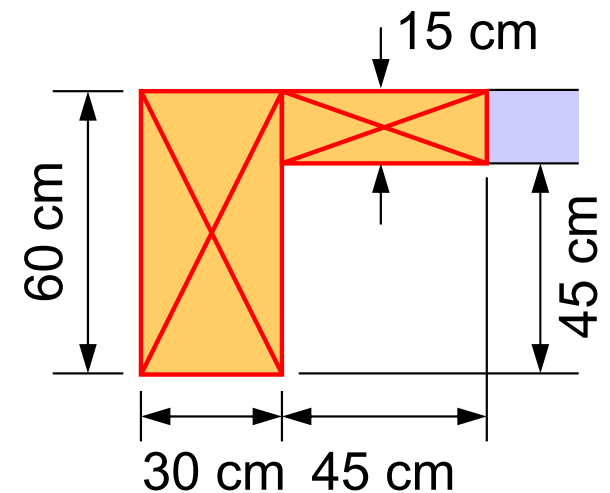
แต่ทราบว่าหน้าตัดคานประสิทธิผล: คิดบางส่วนของพื้นที่

มาช่วยต้านการบิดโดยใช้ระยะที่น้อยกว่า

คือหาพื้นที่คานที่เกินความหนาพื้น = $60 - 15$

$$= 45 \text{ ซม. ควบคุม}$$

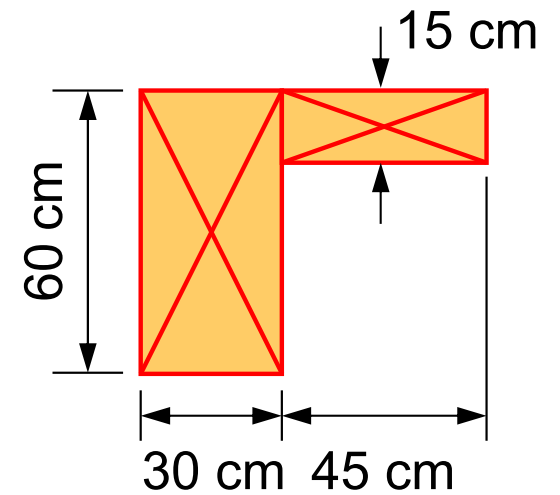
4 เท่าความหนาพื้น = $4 \times 15 = 60 \text{ ซม.}$



ดังนั้น $A_{cp} = (30)(60) + (15)(45) = 2,475 \text{ ซม.}^2$

$$p_{cp} = 2(60+75) = 270 \text{ ซม.}$$

$$\begin{aligned} \text{ขีดจำกัดโมเมนต์บิด: } \frac{\phi T_{cr}}{4} &= \frac{0.85(0.275)\sqrt{280}(2,475)^2}{(270)(1,000)(100)} \\ &= 0.87 < [T_u = 3.3 \text{ ตัน-เมตร}] \end{aligned}$$



ดังนั้นจำเป็นต้องเสริมเหล็กไว้

4. แรงบิด

ตรวจสอบหน่วยแรงเฉือนจากแรงบิดและแรงเฉือนร่วม

กระทำ $b_w d = (30)(54) = 1,620 \text{ ซม.}^2$

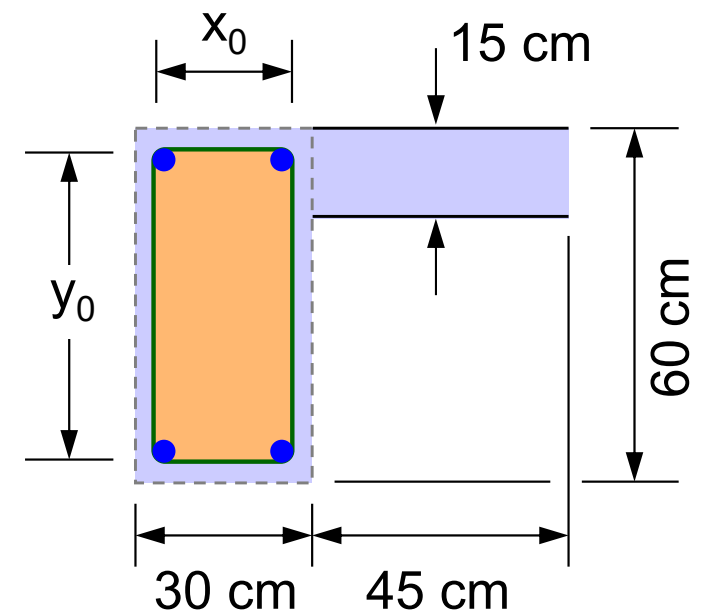
$$x_0 = 30 - 2(4) = 22 \text{ ซม.}$$

$$y_0 = 60 - 2(4) = 52 \text{ ซม.}$$

$$A_{oh} = x_0 y_0 = (22)(52) = 1,144 \text{ ซม.}^2$$

$$A_0 = 0.85A_{oh} = 0.85(1,144) = 972.4 \text{ ซม.}^2$$

$$p_h = 2(22+52) = 148 \text{ ซม.}$$



$$\sqrt{\left(\frac{13.5}{1,620}\right)^2 + \left(\frac{3.3(100)(148)}{1.7(1,144)^2}\right)^2} \leq \frac{0.85}{1,000} (0.53 + 2.1) \sqrt{280}$$

$$0.0235 \text{ ตั้บ/ซม.}^2 \leq 0.0374 \text{ ตั้บ/ซม.}^2$$

OK

5. เหล็กปลอกกรับ

แรงบิด $\frac{A_t}{s} = \frac{3.3(100)(1,000)}{2(0.85)(972.4)(4,000)} = 0.0575 \text{ cm}^2 / \text{cm}$

6. เหล็กปลอกกรับแรง

เฉือน $\phi V_c = 0.85(0.53)\sqrt{280}(30)(54) / 1,000 = 12.2 \text{ ton}$

$$\frac{A_v}{s} = \frac{(V_u - \phi V_c)}{\phi f_y d} = \frac{(13.5 - 12.2)(1,000)}{0.85(4,000)(54)} = 0.0071 \text{ cm}^2 / \text{cm}$$

7. เหล็กปลอกรวม

ทั้งหมด $\frac{A_{v+t}}{s} = 0.007 + 2(0.050) = 0.107 \text{ cm}^2 / \text{cm}$

$$3.5 \frac{b_w}{f_y} = 3.5(30) / 4,000 = 0.026 < \frac{A_{v+t}}{s} \quad \text{OK}$$

ลองใช้เหล็ก DB12: $A_v = 2(1.13) = 2.26 \text{ ซม.}^2$

$$s = 2.26 / 0.107 = 21.1 \text{ ซม.}$$

$$p_h / 8 = 148 / 8 = 18.5 \text{ ซม.}$$

เลือกใช้เหล็กปลอก DB12 @ 0.18 เมตร ($A_{v+t} = 2.26 / 18 = 0.126 \text{ ซม.}$)

8. เหล็กนอนที่

ต้องการ

$$A_\ell = \frac{A_t}{s} p_h \frac{f_{yv}}{f_{yl}} = 0.0575(148) = 8.51 \text{ cm}^2$$

$$A_{\ell, \min} = \frac{1.3 \sqrt{280}(2,475)}{4,000} - 8.51 = 4.95 \text{ cm}^2 < A_\ell \quad \text{OK}$$

โดยที่ A_t/s ต้องไม่น้อยกว่า $1.8(30)/4,000 = 0.0132 \text{ ซม.}$ OK

การตัด: $A_e = 13.9 \text{ ซม.}^2$ (เหล็กบน)

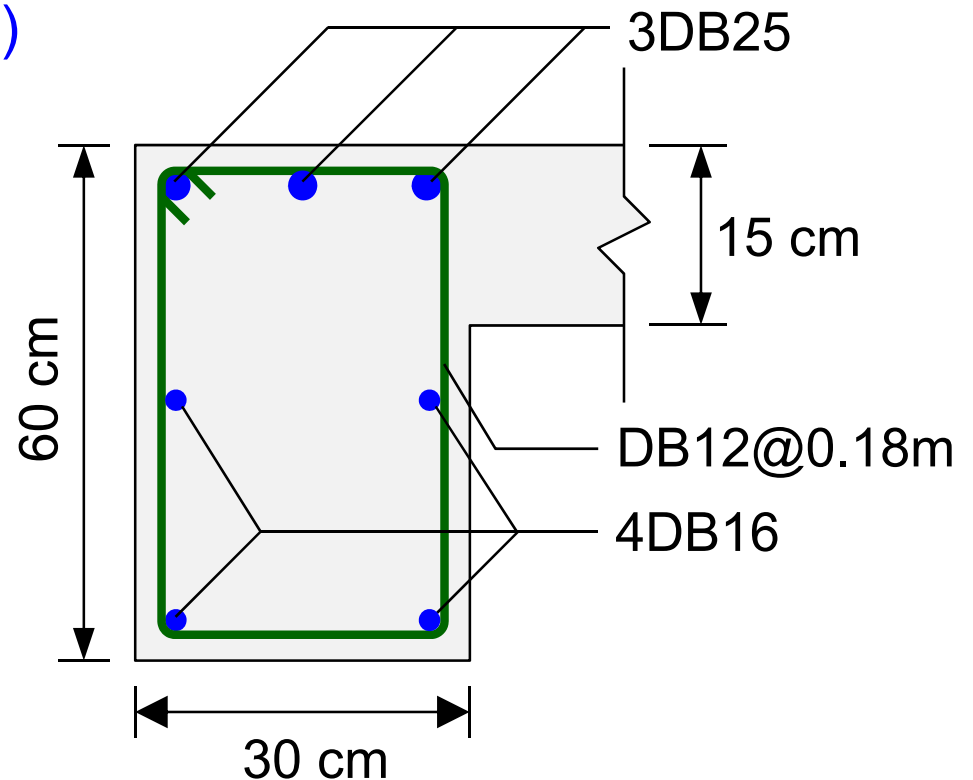
การบิด: $A_e = 8.51 \text{ ซม.}^2$ (กระจายรอบหน้าตัด)

เสริมเหล็ก **4DB16** ในช่วงล่างของหน้าตัด

พื้นที่เหล็กเสริมที่เหลือ = $8.51 - 4(2.01) = 0.47 \text{ ซม.}^2$

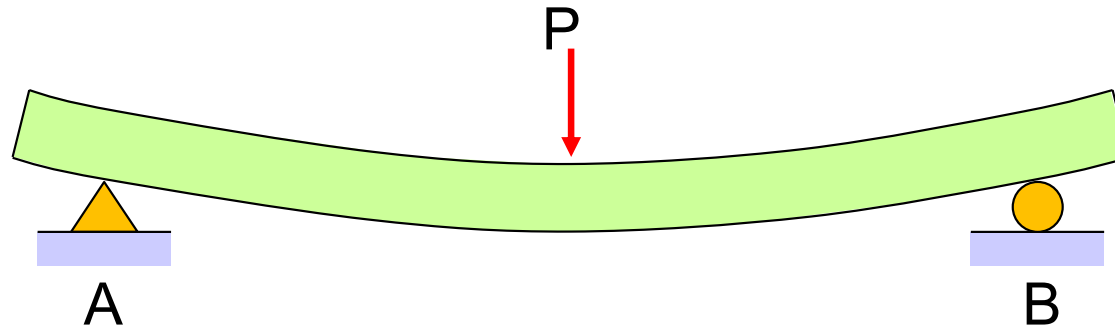
รวมกับเหล็กเสริมบน = $13.9 + 0.47 = 14.37 \text{ ซม.}^2$

∴ ใช้เหล็กเสริมบน **3DB25** ($A_s = 14.73 \text{ ซม.}^2$)

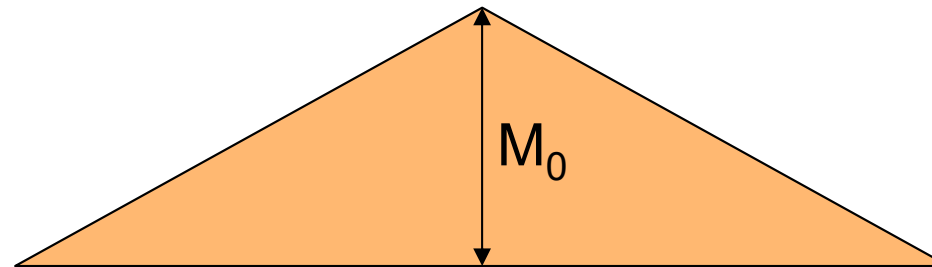


Compatibility Torsion

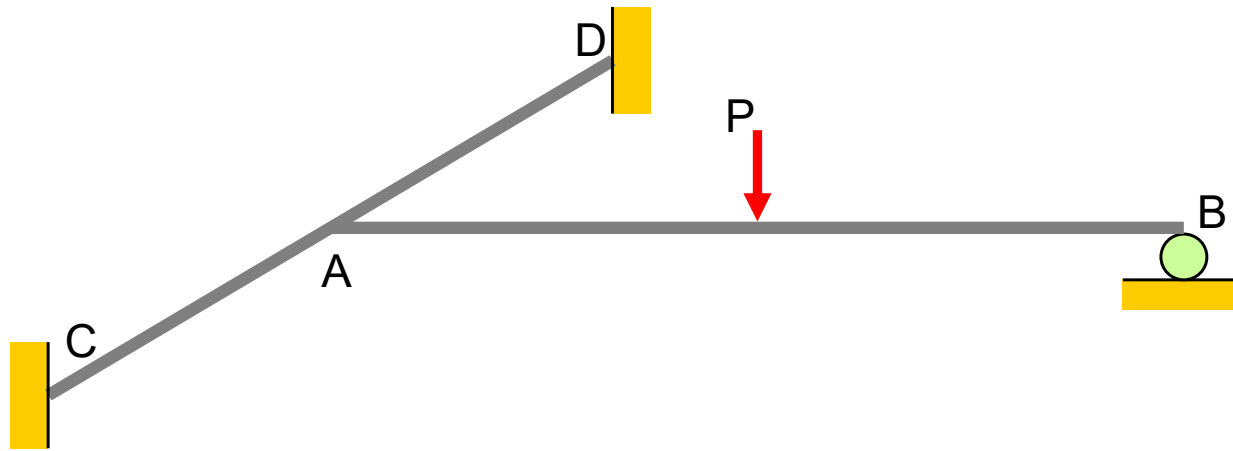
Torsional moment results from the compatibility of deformation between members meeting at a joint.



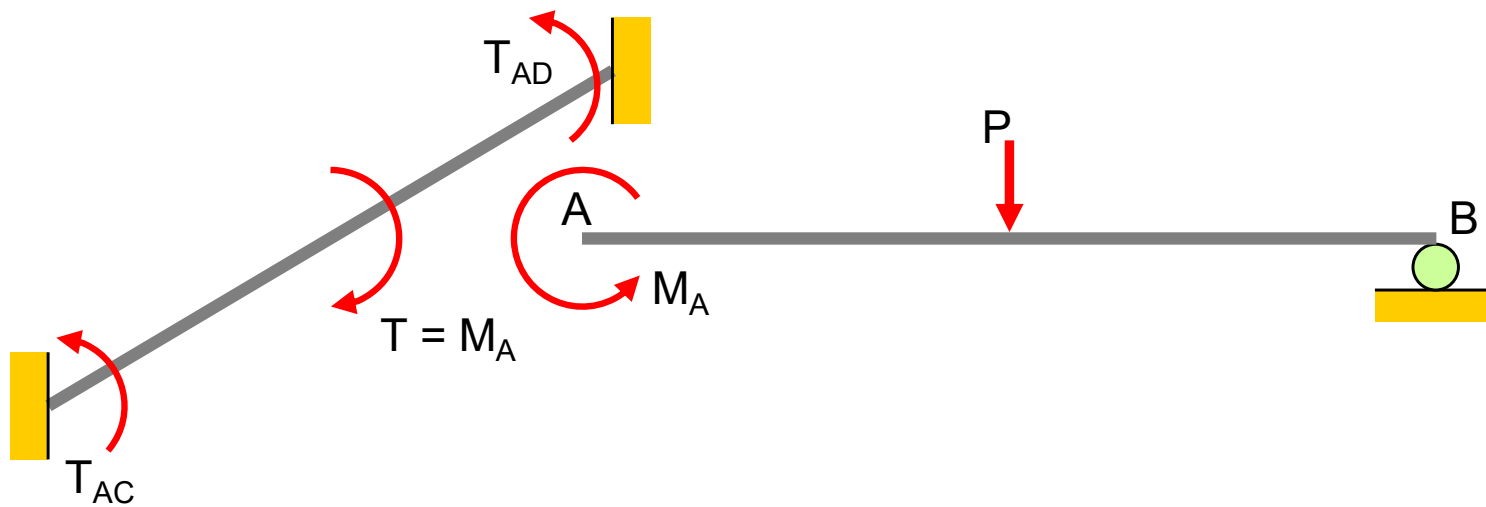
The simple beam A-B develops a slope at each end when loaded



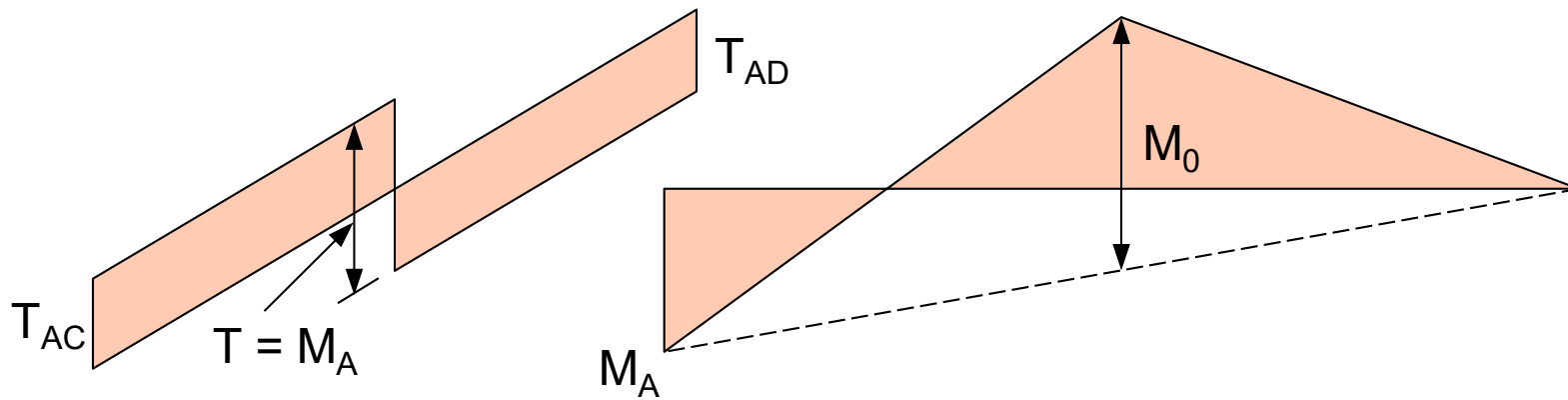
Bending moment diagram



If, however, end **A** is built monolithically with a cross beam **C – D**



Moment @ end **A** will create torsion on a cross beam **C – D**

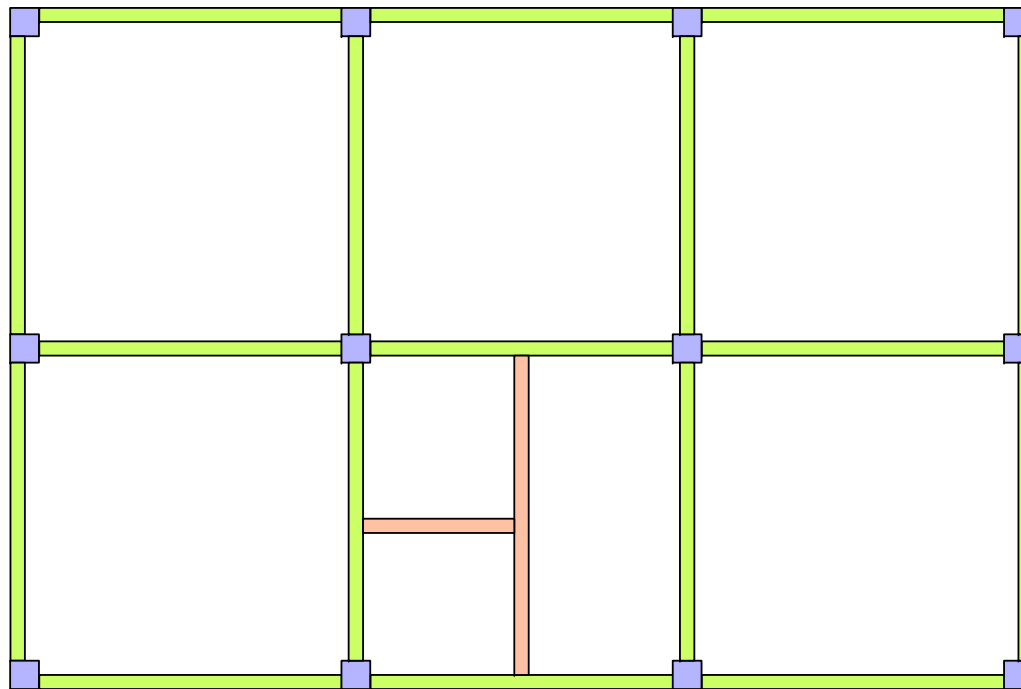


Torsion diagram of beam C-D

Moment diagram of beam A-B

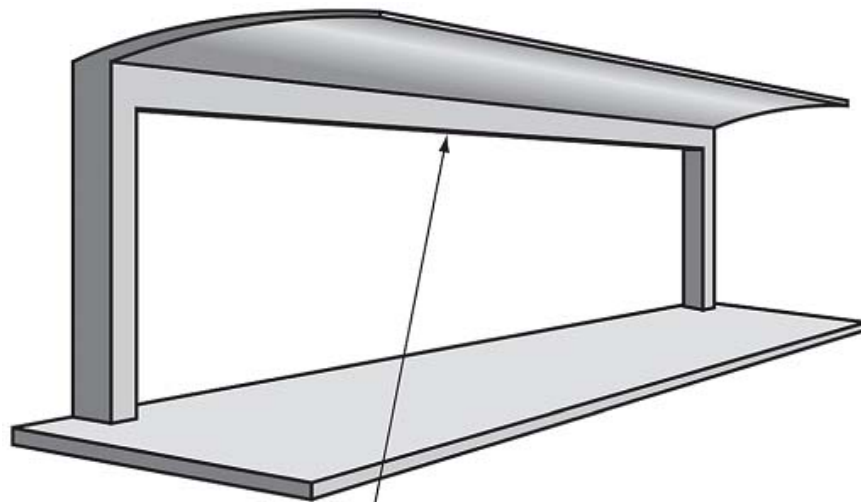
When beam C-D cracked from torsion, torque **T** and moment **M_A** drop.

Reduction of torsion results from a redistribution of moment.



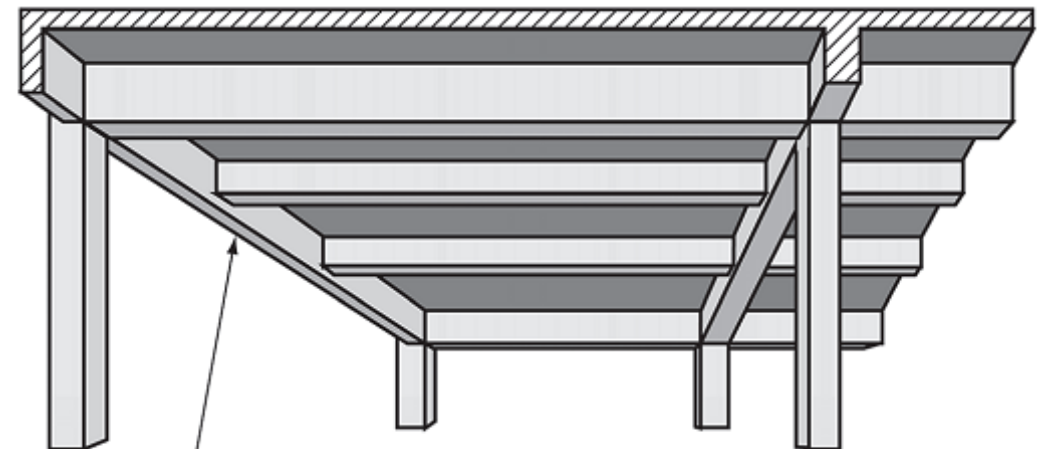
22.7.3.2 – In a statically indeterminate structure where $T_u \geq \phi T_{cr}$ and a reduction of T_u can occur due to redistribution of internal forces after torsional cracking, it shall be permitted to reduce T_u to ϕT_{cr} .

22.7.3.3 – If T_u is redistributed, the factored moments and shears used for design of the adjoining members shall be in equilibrium with the reduced torsion.



Design torque may ***not*** be reduced because moment redistribution is ***not*** possible

Equilibrium Torsion

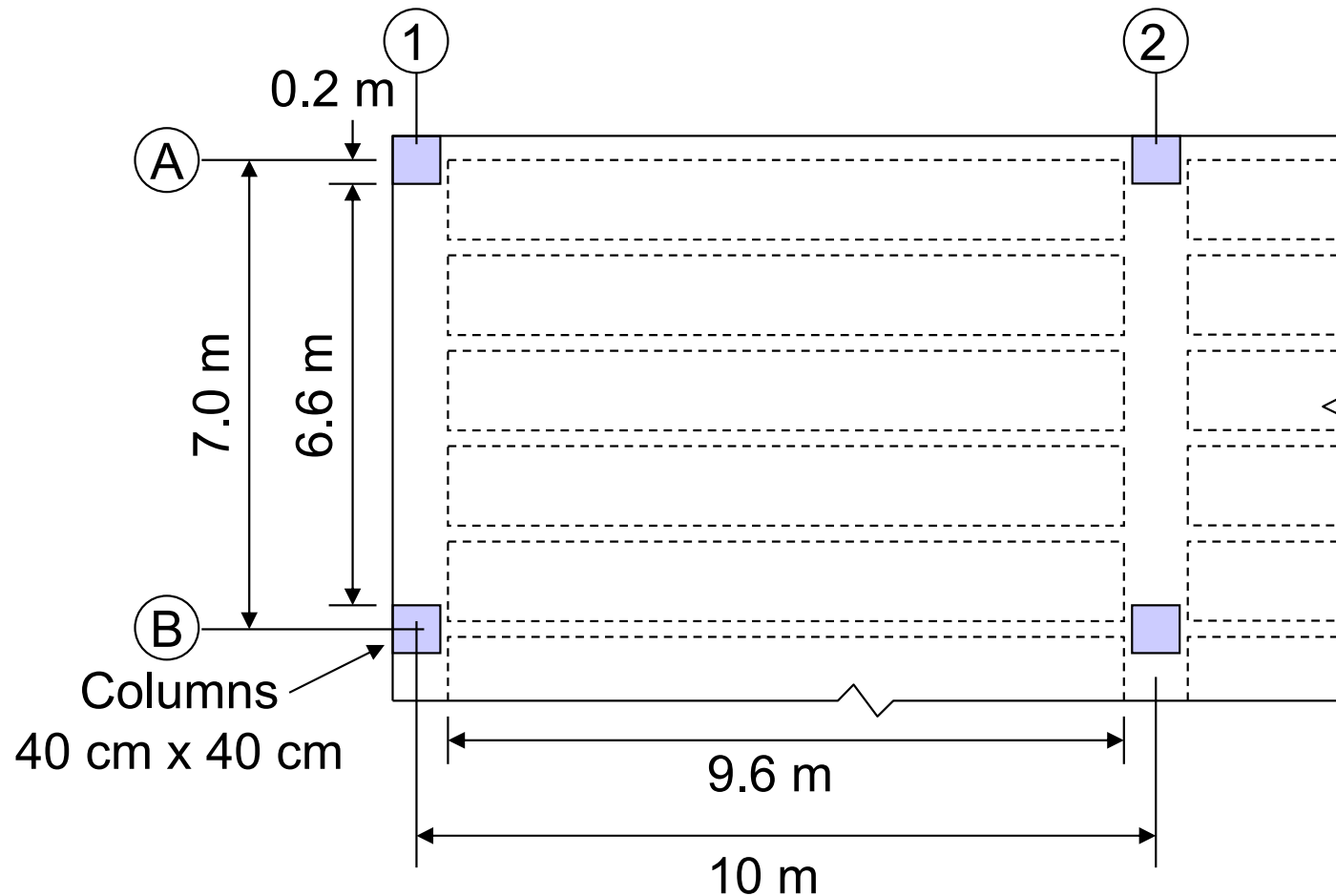


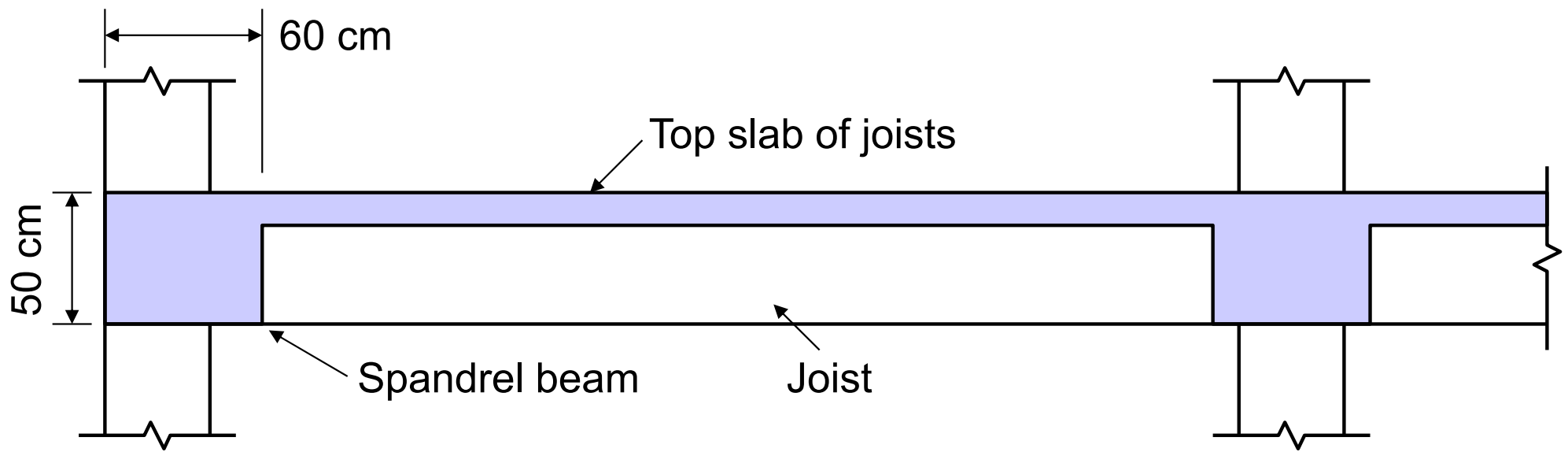
Design torque for this spandrel beam may be reduced because moment redistribution is possible

Compatibility Torsion

EXAMPLE 9.3 Compatibility Torsion

The one-way joist system supports a total factored dead load of 750 kg/m^2 and a factored live load of 800 kg/m^2 , totaling $1,550 \text{ kg/m}^2$. Design the end span, AB , of the exterior spandrel beam on grid line 1. The factored dead load of the beam and the factored loads applied directly to it total 1.6 t/m . The spans and loadings are such that the moments and shears can be calculated by using the moment coefficients. Use $f_y = f_{yt} = 4,000 \text{ ksc}$ and $f'_c = 280 \text{ ksc}$





1. Compute the bending moments for the beam.

Joist reaction per meter of length of beam is $\frac{wL}{2} = \frac{1.55 \times 9.6}{2} = 7.44 \text{ t/m}$

Total load on beam is $w = 7.44 + 1.6 = 9.04 \text{ t/m}$

Exterior end negative: $-M_u = \frac{wL^2}{16} = \frac{9.04 \times 6.6^2}{16} = 24.6 \text{ t-m}$

Midspan positive: $+M_u = \frac{wL^2}{14} = \frac{9.04 \times 6.6^2}{14} = 28.1 \text{ t-m}$

First interior negative: $-M_u = \frac{wL^2}{10} = \frac{9.04 \times 6.6^2}{10} = 39.4 \text{ t-m}$

2. Check $b = 60$ cm, $d = 44$ cm, and $h = 50$ cm.

Since b and h have already been selected, we shall check whether they are sufficiently large.

From $f_y = 4,000$ ksc and $f'_c = 280$ ksc $\rightarrow \rho_{\min} = 0.0035$, $\rho_{\max} = 0.0229$

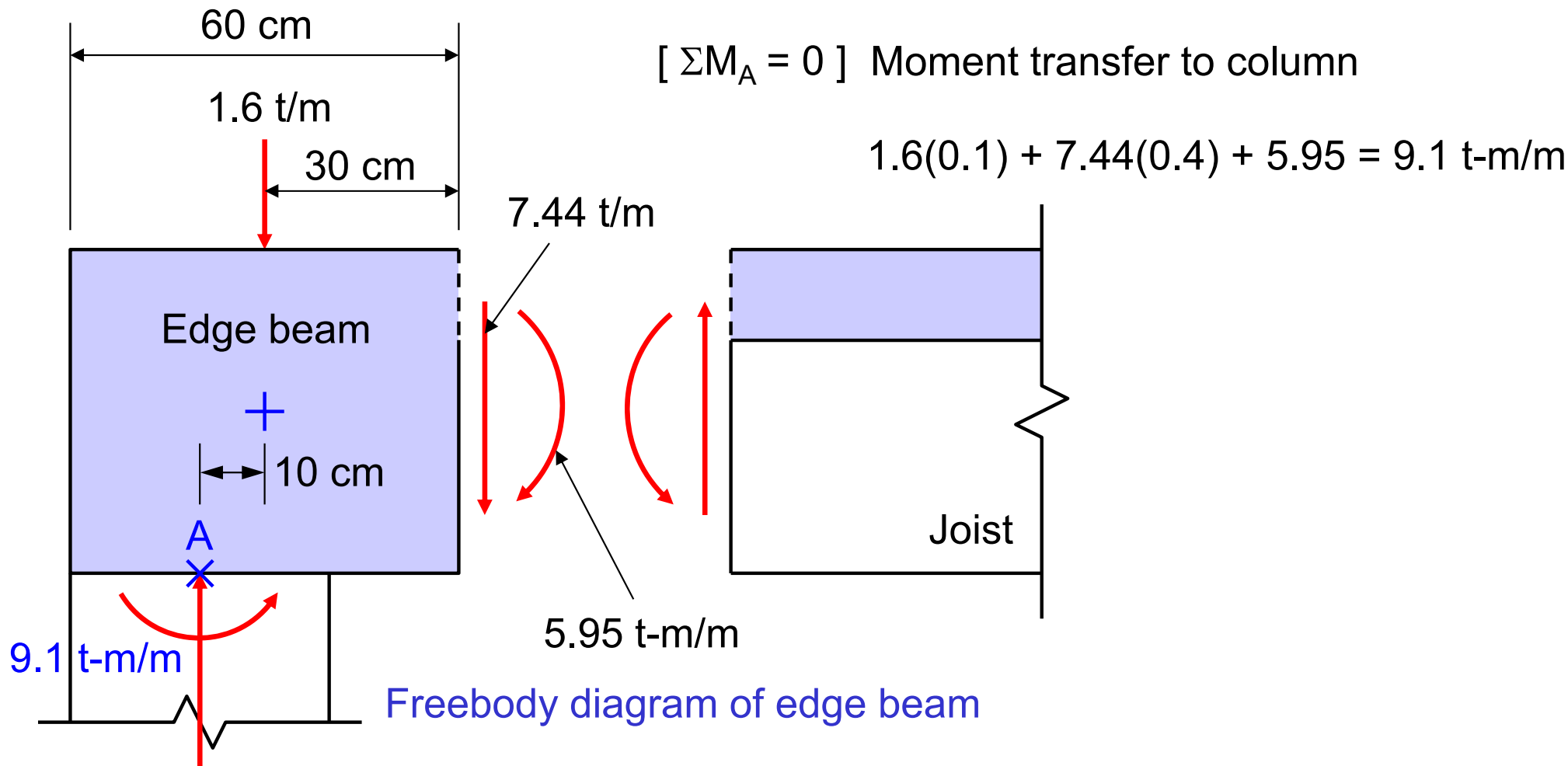
	M_u	R_n	ρ	Check
exterior end negative:	24.6	23.5	0.0062	OK
midspan positive:	28.1	26.9	0.0072	OK
first interior negative:	39.4	37.7	0.0103	OK

3. Compute the final M_u , V_u , and T_u diagrams.

The designed joists have a clear span of 9.6 m. Because the exterior ends of the joists are “built integrally with” a “spandrel beam,” gives the exterior negative moment in the joists as

$$-M_u = \frac{wL^2}{24} = \frac{1.55 \times 9.6^2}{24} = 5.95 \text{ t-m}$$

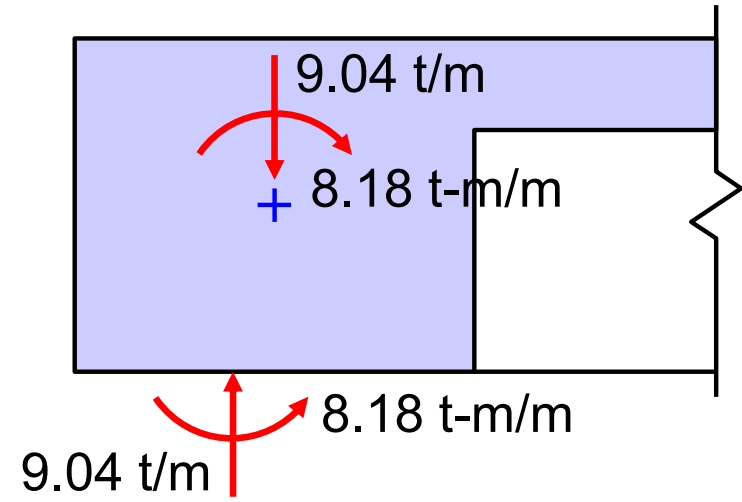
This bending moment acts as a twisting moment on the edge beam.



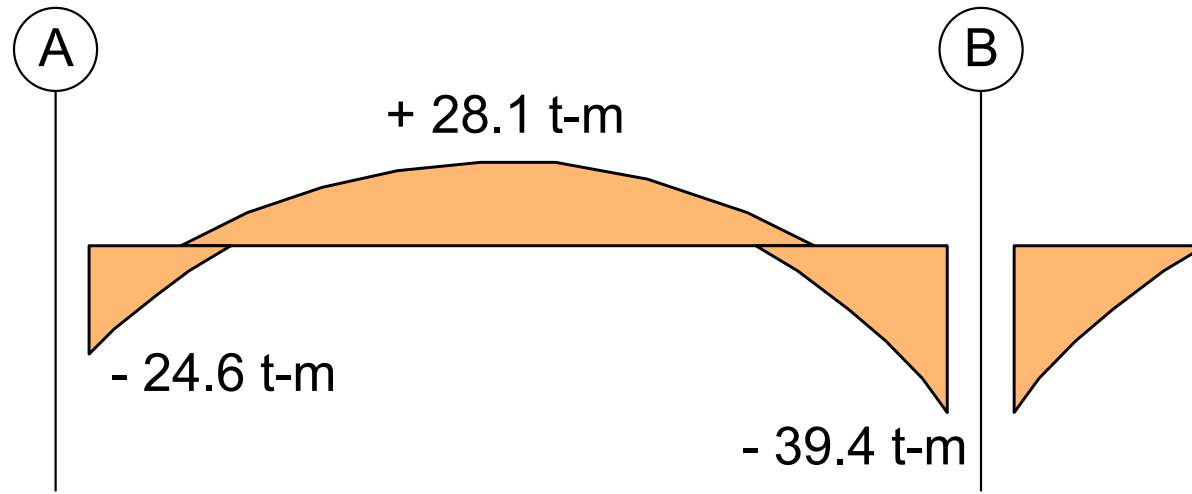
For torsion design of edge beam, we need the torque about the centroid of edge beam:

$$mt = 5.95 + 7.44(0.3)$$

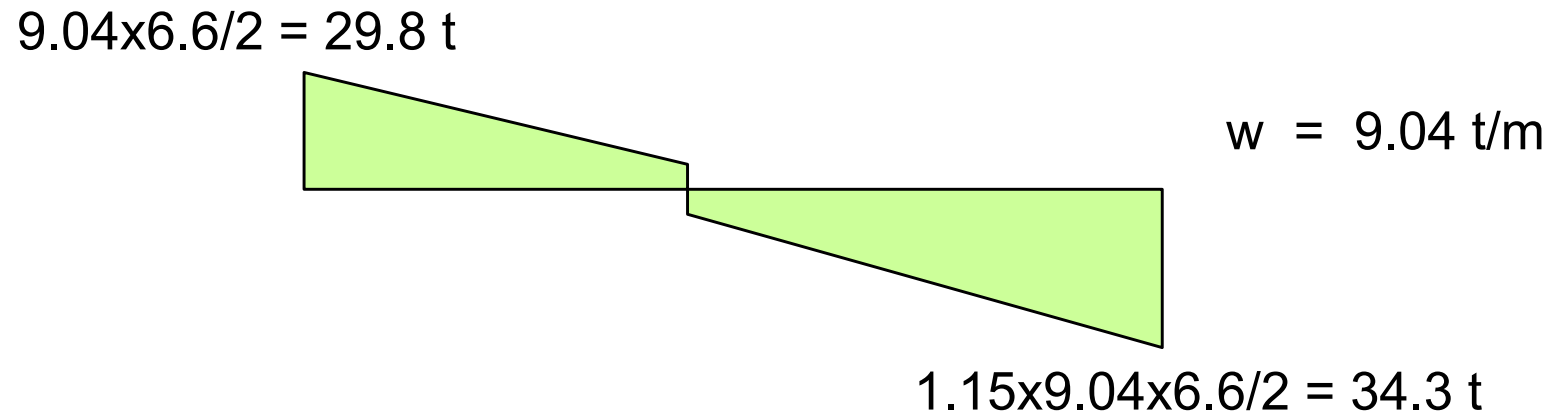
$$= 8.18 \text{ t-m/m}$$



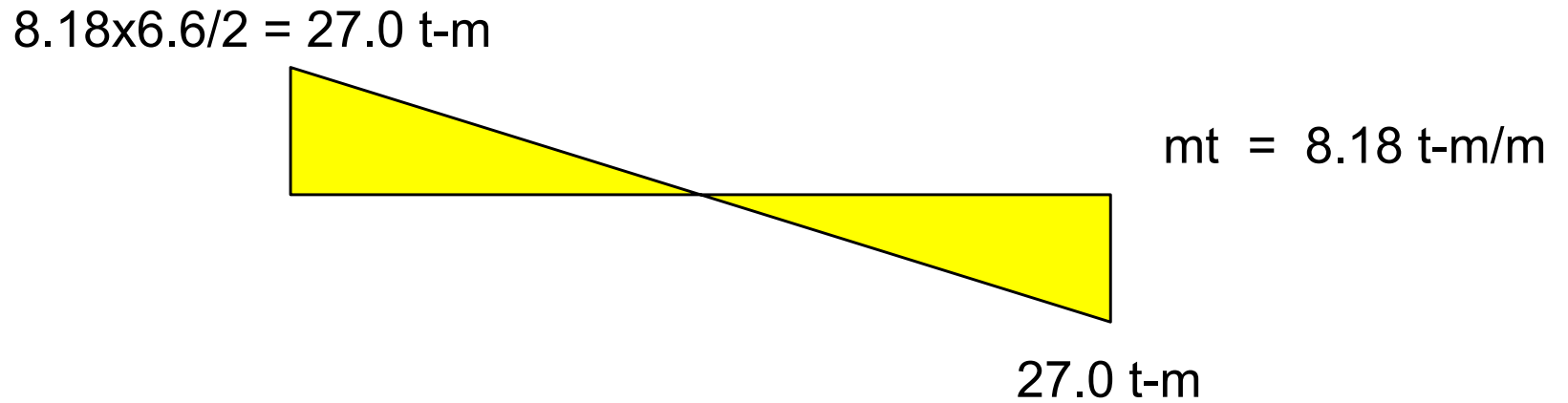
BMD



SHD

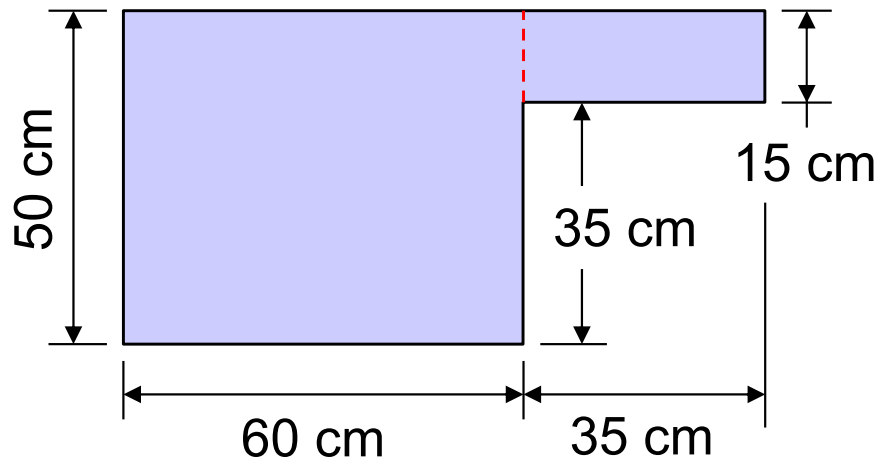


TSD



4. Should torsion be considered? torsion can be neglect, if $T_u \leq \phi T_{cr} / 4$

$$T_{cr} = 1.1 \sqrt{f'_c} \left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \right)$$



Effective cross section for torsion :

The projection of the flange is the smaller of

- height of web below flange = $50 - 15 = 35$ cm

- four times flange thickness = $4(15) = 60$ cm

$$A_{cp} = 50 \times 60 + 15 \times 35 = 3,525 \text{ cm}^2$$

$$p_{cp} = 2(50 + 95) = 290 \text{ cm}$$

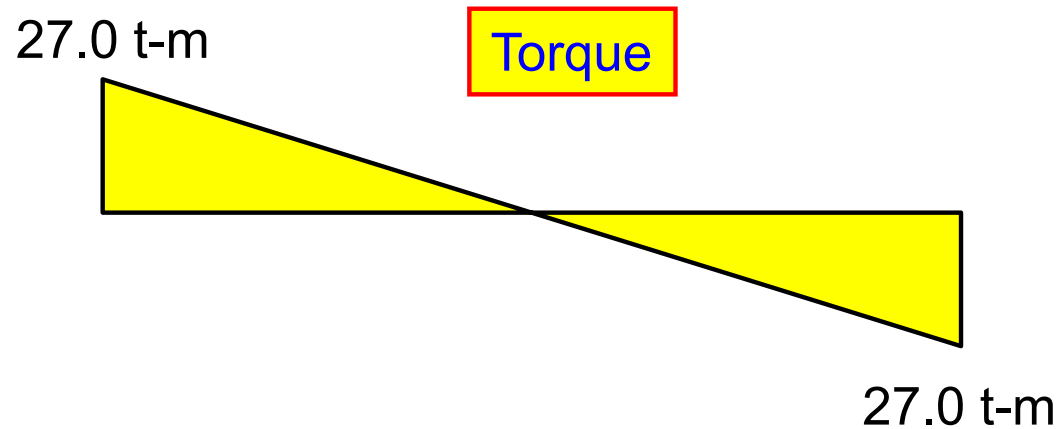
$$\begin{aligned} \frac{\phi T_{cr}}{4} &= 0.85 \times \frac{1.1 \sqrt{280}}{4} \left(\frac{3,525^2}{290} \right) = 167,591 \text{ kg-cm} \\ &= 1.67 \text{ t-m} \end{aligned}$$

Since the maximum torque of **27.0** t-m exceeds this value, torsion must be considered.

5. Compatibility Torsion?

Because the loading involves compatibility torsion, we can reduce the maximum torsional moment, T_u in the spandrel beam, at d from the faces of the columns to:

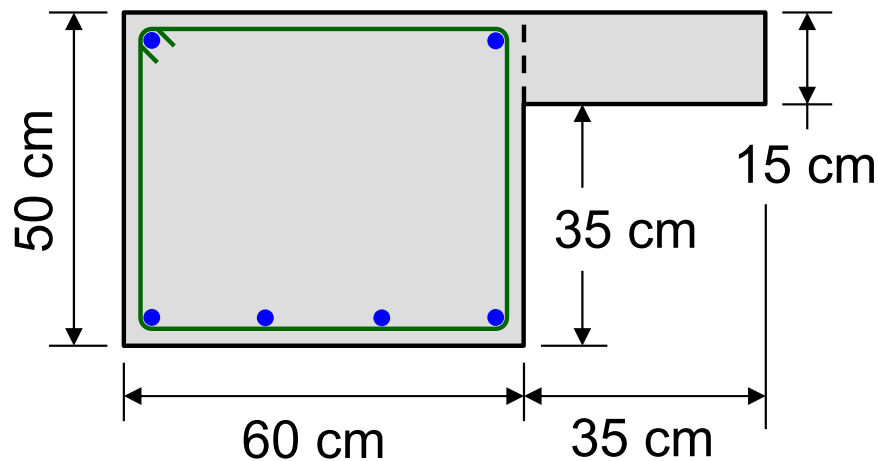
$$T_u = 0.85 \times 1.1 \sqrt{280} \left(\frac{3,525^2}{290} \right) = 670,364 \text{ kg-cm} = 6.7 \text{ t-m}$$



6. Is the section big enough for the torsion?

$$\text{Solid section: } \sqrt{\left(\frac{V_u}{bd}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2}\right)^2} \leq \phi \left(\frac{V_c}{bd} + 2.1\sqrt{f'_c}\right)$$

From shear diagram, at distance d from face of support B :



$$V_u = 34.3 - 9.04(0.44) = 30.3 \text{ ton}$$

covering 4 cm and use DB12 stirrup

$$A_{oh} = (50 - 2 \times 4 - 1.2)(60 - 2 \times 4 - 1.2) \\ = 40.8 \times 50.8 = 2,073 \text{ cm}^2$$

$$p_h = 2(40.8 + 50.8) = 183.2 \text{ cm}$$

$$\sqrt{\left(\frac{30.3 \times 10^3}{60 \times 44}\right)^2 + \left(\frac{6.7 \times 10^5 \times 183.2}{1.7 \times 2,073^2}\right)^2} = \sqrt{131.7 + 282.3} = 20.3 \text{ kg/cm}^2$$

$$\phi \left(\frac{V_c}{bd} + 2.1\sqrt{f'_c}\right) = 0.85(0.53 + 2.1)\sqrt{280} = 37.4 \text{ kg/cm}^2$$

Since 20.3 kg/cm^2 is less than 37.4 kg/cm^2 , the section is large enough.

7. Compute the stirrup area required for shear in the edge beam.

$$V_c = 0.53\sqrt{280}(60)(44)/1,000 = 23.4 \text{ ton}$$

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_u / \phi - V_c}{f_{yt} d} = \frac{30.3 / 0.85 - 23.4}{4.0 \times 44} = 0.0696 \text{ cm}$$

8. Compute the stirrup area required for torsion.

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_u / \phi}{2 \times 0.85 A_{oh} f_{yt}} = \frac{6.7 \times 10^5 / 0.85}{2 \times 0.85 \times 2,073 \times 4,000} = 0.0559 \text{ cm}$$

9. Combined stirrup

$$\frac{A_{v+t}}{s} = \frac{A_v}{s} + \frac{2A_t}{s}$$

$$= 0.0696 + 2 \times 0.0559 = 0.1814 \text{ cm}^2 / \text{cm} > [3.5 b / f_{yt} = 0.0525] \text{ OK}$$

Select close stirrup DB12 ($A_{v+t} = 2(1.13) = 2.26 \text{ cm}^2$)

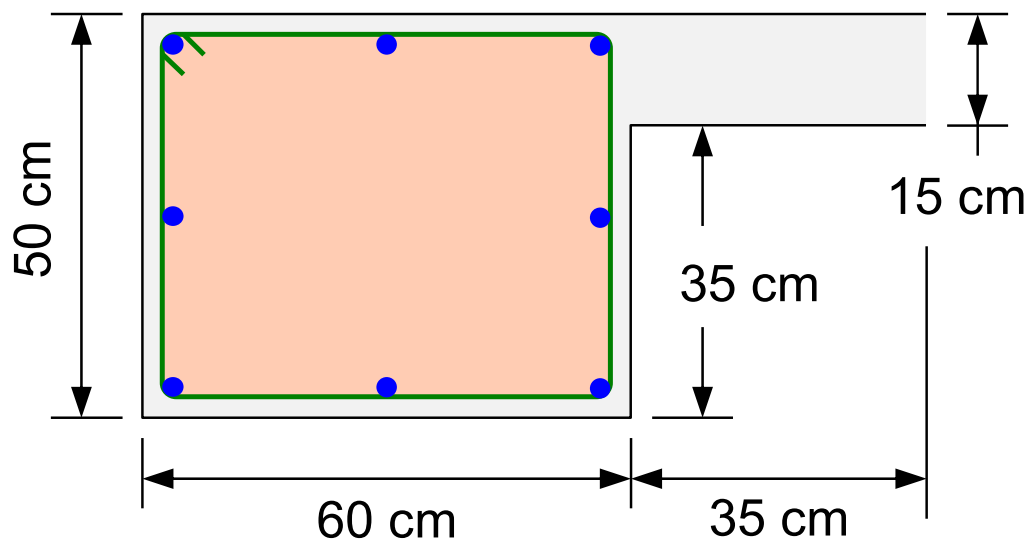
USE Stirrup DB12 @ 0.12 m ($A_{v+t}/s = 2.26/12 = 0.1883 \text{ cm}^2/\text{cm}$)

10. Design the longitudinal reinforcement for torsion

$$A_l = \frac{A_t}{s} p_h \frac{f_{yt}}{f_{yl}} = 0.0559 \times 183.2 = 10.24 \text{ cm}^2 \quad \text{control}$$

$$A_{lmin} = \frac{1.3 \sqrt{f'_c} A_{cp}}{f_{yt}} - \frac{A_t}{s} p_h \frac{f_{yt}}{f_{yl}}$$

$$= \frac{1.3 \sqrt{280} \times 3,525}{4,000} - 10.24 = 8.93 \text{ cm}^2$$



Distribute $A_l = 10.24 \text{ cm}^2$ into 8 bars

3 bars @ top and bottom and 1 bar halfway up each side to satisfy 30 cm spacing.

Top & bottom steels use 3 bars

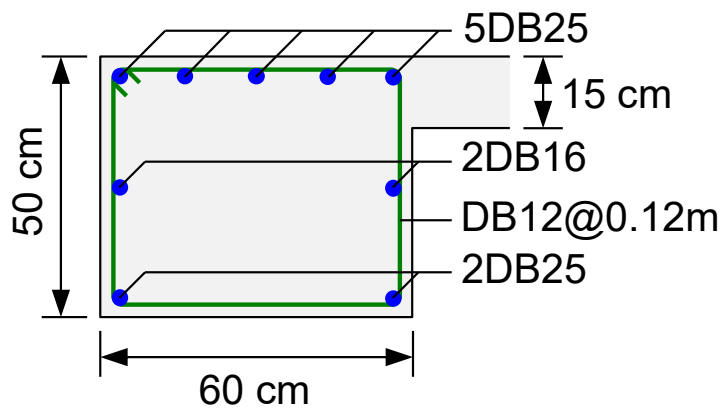
$$= 3(10.24)/8 = 3.84 \text{ cm}^2$$

to be summed up with flexural steels

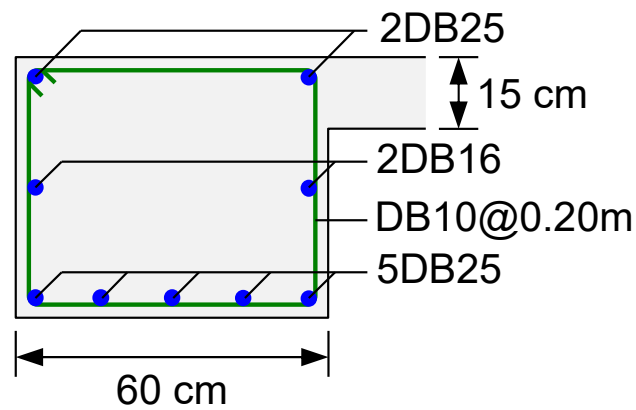
Halfway steels = $2(10.24)/8 = 2.56 \text{ cm}^2$ **USE 2-DB16** ($A_s = 4.02 \text{ cm}^2$)

Flexural + Torion Steels:

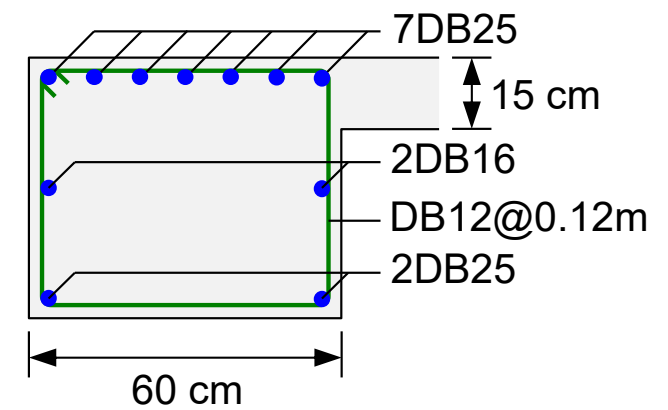
	Position	Flexural Steel	Total Steel	Select
Exterior support	Top	16.37	$16.37+3.84=20.21$	5-DB25
Midspan	Bottom	19.01	$19.01+3.84=22.85$	5-DB25
Interior support	Top	27.19	$27.19+3.84=31.03$	7-DB25



Exterior support



Midspan



Interior support