Recommandations Générales

- Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction .
- La référence des questions doit obligatoirement être mentionnée .
- Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte .
- L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.
- L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve dans l'ordre qui lui convient.

La durée de l'épreuve est 4 heures

L'épreuve comporte 5 exercices indépendants répartis comme suit :

Exercice 1	Equations différentielles	0.75 pts
Exercice 2	Etude de fonction et suites	9.5 pts
Exercice 3	Nombres complexes	3.25 pts
Exercice 4	Structures algébriques	3.50 pts
Exercice 5	Arithmétique	3 pts

Exercice 1 (0.75 points)

0.25 1) Résoudre l'équation différentielle suivante : $(E) : y'' - 4y' + 13y = 0$

0.25 2)a) Déterminer la solution particulière f de (E) vérifiant les conditions suivantes : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

0.25 b) Déduire la valeur numérique exacte de l'intégral : $I = \int_0^{\pi} e^{2x} \cos(3x)\,dx$.

Exercice 2 (9.5 points)

Soit f_n la fonction numérique définie sur IR^* par : $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{x^2} - 1 \quad (\forall n \in IN)$

(C_n) est la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie 1 : on prend $n = 1$

0.5 1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x)$.

0.5 2) Déterminer les branche infinies de la courbe (C_1) .

0.75 3) Calculer $f_1'(x)$ pour tout x de IR^* et dresser le tableau de variations de la fonction f_1 .

4) Soit h la restriction de f_1 sur $]0; 2]$

0.25 Montrer que h réalise une bijection de $]0; 2]$ sur un intervalle J à déterminer .

0.5 5) Calculer $f_1(1)$ et $(h^{-1})'(e - 1)$.

0.5 6) Tracer la courbe (C_1) .

Partie 2 :

0.5 1) Etudier les variations de f_n sur les intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

0.25 2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet au mois une solution α_n dans l'intervalle $]-\infty; 0[$.

0.25 3)a) Etudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.

0.25 b) En déduire la position relative de (C_n) et (C_{n+1})sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.

0.5 c) Montrer que la suite (α_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente .

0.25 4) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$.

5) On pose : $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k^2}{k^2} \quad (\forall n \in IN^*)$

0.75 Montrer que la suite (w_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente .

(Remarque : $(\forall k \geq 2)$ $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$)

Partie 3 :

On considère F la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} F(x) = x \int_x^{2x} \frac{e^t}{t^2}\,dt \;\; ; \;\; x \neq 0 \\ F(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

0.25 1) Montrer que F est bien définie sur IR .

0.5 2)a) Montrer que $(\forall x \geq 0)\ \frac{e^x}{2} \leq F(x) \leq \frac{e^{2x}}{2}$ et $(\forall x \leq 0)\ \frac{e^{2x}}{2} \leq F(x) \leq \frac{e^x}{2}$.

0.25 b) En déduire que F est continue en 0 .

0.5 3) Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

0.25 4)a) Montrer que $(\forall x \in IR^*)\quad F(x) = e^x - \frac{e^{2x}}{2} + x\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$.

0.5 b) Montrer que F est dérivable sur IR^* et que $(\forall x \in IR^*)\ F'(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$.

0.5 5)a) Montrer que $(\forall x > 0)\quad e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt \leq e^{2x} \ln 2$

et que $(\forall x < 0)\quad e^{2x} \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt \leq e^x \ln 2$.

0.25 b) En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$.

0.25 6)a) Vérifier que $(\forall x \in IR^*)\quad F(x) - \frac{1}{2} = -\frac{(e^x - 1)^2}{2} + x\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$.

0.25 b) Montrer que F est dérivable en 0 .

0.25 c) Dresser le tableau de variations de F .

Exercice 3 (3.25 points)

Le plan complexe est rapporté á un repère orthonormé direct$(o, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)\ : \frac{1}{m}z^2 + (1 - 3i)z - 4m = 0$ avec $m \in \mathbb{C}^*$

0.25 1)a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $8 - 6i$.

0.5 b) Déterminer en fonction de m , z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) tel que $Re\left(\frac{z_1}{m}\right) < 0$.

0.5 c) Calculer $arg(z_1)$ et $arg(z_2)$ en fonction de $arg(m)$.

2) On considère les points M_1 , M_2 , M , et D d'affixes respectifs : z_1 , z_2 , m et $1 + 3i$.

0.5 a) Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle en O et que $OM_1 = 2OM_2$

0.5 b) Montrer que si $arg(z_1 + z_2) \equiv 0\ [\pi]$ alors les points O , M et D sont alignés.

0.25 c) Déterminer l'ensemble des points M tel que $arg(z_1 + z_2) \equiv 0\ [\pi]$.

3) Le point M'_1 est l'image du point M_1 par la rotation R_1 de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$;

M'_2 est l'image du point M_2 par la rotation R_2 de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

0.75 Montrer que les points M_1 , M_2 , M'_1 et M'_2 sont cocycliques .

Exercice 4 (3.5 points)

Les parties Partie I et Partie II sont indépendantes.

Partie 1

On définit dans IR la loi de composition interne " * " par :

$$(\forall\ (x,y) \in IR^2\ ):\ x * y = x \times y - (x + y) + 2$$

0.5 1) Montrer que la loi " * " est commutative et associative.

0.5 2) Résoudre dans IR l'équation $\sqrt{2} * x = \sqrt{2}$ puis déduire que la loi " * " admet un élément neutre que l'on déterminera.

0.25 3) Déterminer l'ensemble des èlèmentes inversibles de IR pour la loi " * " .

Partie 2

On rappelle $(M_2(IR), +;\times)$ et un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I .

Pour tout couple $(x,y) \in IR^2$ on pose $M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{pmatrix}$ et

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère l'ensemble $E = \{\, M(x,y) / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$.

0.5 1) Montrer que $(E, +)$ est un groupe commutatif .

0.5 2) Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

0.75 3) En déduire que $(E\ ,+,\times)$ est un anneau unitaire ,
Est ce que $(E\ ,+,\times)$ est intègre ?

0.5 4) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $\left(M(x,y)\right)^n = 2^{n-1}(x^n H + y^n K\,)$

Exercice 5 (3 points)

On considère dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'équation :(E) : $x^3 + y^3 = x^2 + 2022xy + y^2$.

Soit (x,y) une solution de (E) .

on pose $d = x \wedge y$ et $x = da$ et $y = db$ avec $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$

0.25 1) Vérifier que $a \wedge b = 1$ et $(da + db - 1)(a^2 - ab + b^2) = 2023ab.$

0.25 2)a) Montrer que $(a^2 - ab + b^2) \wedge ab = 1$.

0.25 b) En déduire que $(a^2 - ab + b^2)$ divise 2023 .

3) Dans cette question on suppose que 17 divise $(a^2 - ab + b^2)$

0.5 a) Vérifier que $a^3 \equiv -b^3\ [17]$ en déduire que $a^{15} \equiv -b^{15}\ [17]$.

0.5 b) Montrer que $a \wedge 17 = 1$ et $b \wedge 17 = 1$
en déduire que $a^{16} \equiv b^{16}\ [17]$.

0.5 c) Montrer que $a \equiv -b\ [17]$ en déduire que $3a^2 \equiv 0\ [17]$.

4) On rappel que $2023 = 7 \times 17^2$

0.25 En utilisant les questions 2)a) et 3)c)
Montrer que $a^2 - ab + b^2 = 1$ ou $a^2 - ab + b^2 = 7$.

0.5 4) Résoudre dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'équation (E) .