Série 2 : continuité 2 bac pc svt ste

Exercice 1

A) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x-1} & \text{si } x>1 \\ g(1)=2 \\ g(x)=\dfrac{x^3+4x-5}{x^2-1} & \text{si } x<1 \end{cases}$$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) Étudier la continuité à gauche et à droite de la fonction g au point $x_0=1$.

B) Soit h la fonction numérique définie sur $]1;+\infty[$

par : $h(x)=\dfrac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

1) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1;+\infty[$ et que $\alpha\in]1;2[$.

2) Vérifier que : $\alpha=\sqrt[3]{2\alpha^2-\alpha+1}$.

C) Soit f la fonction numérique définie sur $I=[1;+\infty[$

par : $f(x)=x\sqrt{x^2-1}$

1) Justifier la continuité de la fonction f sur I.

2) Montrer que f est strictement croissante sur I.

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

4) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in I$.

Exercice 2

A) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(2x)}{\sqrt[3]{x^2+1}-1} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+5x^2+3}-2x+1\right)$$

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt[3]{4x+7}-3}{\sqrt{2x^2-1}-7} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x-1}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{\sqrt[3]{x^2+4}+5} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{4x-1}{\sqrt{x^2+3x+5}+2x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{1-x}}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x+2}-4}{x-1}$$

Exercice 3

B) Simplifier les nombres suivants :

$$A=\frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{729}}\times\sqrt{\sqrt{81}}}{\sqrt[3]{3^{17}}} \quad ; \quad B=\sqrt{\sqrt{3}}+2\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{243}$$

$$C=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{x^5}}}{\sqrt{\sqrt{y^{-5}}}}\times\sqrt[12]{\frac{x^{-8}}{y^3}} \quad (\text{avec } x\in\mathbb{R}_+^* \text{ et } y\in\mathbb{R}_+^*)$$

C) Classer par ordre croissant les nombres :

$$a=\sqrt[3]{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad b=\sqrt{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad C=\sqrt[4]{7}$$

D) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt[5]{2x-1}\geq2$

Exercice 4

E) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

1) Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle I à déterminer.

4) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in I$.

5) Montrer que l'équation $f(x)=x^2$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1;2]$.

Série 2 : continuité 2 bac pc svt ste

Exercice 5

A) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt[3]{(8x^3+x^2)^2}} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{64x^3+x^2}-4x\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x-3\right) \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{7x^2-x}+\sqrt{x^2-3x}-4}{x^2-1} \quad ; \quad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt{x+3}-2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[4]{\frac{x^3+5x^2-7}{16x^3-3x+1}} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+x^2+2}}{x+2}$$

B) Simplifier les nombres suivants :

$$A=\frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^4}}.\sqrt[3]{8}.\left(\sqrt[7]{4}\right)^7}{\sqrt[3]{16}\times\sqrt{\sqrt[3]{32}}} \quad ; \quad B=\frac{\sqrt[4]{3}\times\sqrt[20]{3.\sqrt[4]{9}}\times27^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{243}.\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$$

C) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=x^3+3x-5$$

1) Étudier les variations de la fonction g.
2) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α puis vérifier que $1<\alpha<2$.
3) En utilisant la méthode de dichotomie, donner Un encadrement de α d'amplitude $0,25$.
4) Dresser le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

D) Soit h la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} h(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2+6x}-2\sqrt[3]{2}}{x-2} & \text{si } x\neq2 \\ h(2)=\dfrac{5\sqrt[3]{2}}{12} \end{cases}$$

Montrer que la fonction h est continue en $x_0=2$.

E) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x)=\dfrac{x-3}{2\sqrt{x}}$

1) Calculer les limites : $\lim_{x\to0^+}f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.
2) Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
4) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle I à déterminer.
5) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in I$.

Exercice 7

A) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x-1} & \text{si } x>1 \\ g(1)=2 \\ g(x)=\dfrac{x^3+4x-5}{x^2-1} & \text{si } x<1 \end{cases}$$

1) Calculer : $\lim_{x\to-\infty}g(x)$ et $\lim_{x\to-\infty}g(x)$.
2) Étudier la continuité à gauche et à droite de la fonction g au point $x_0=1$.

B) Soit h la fonction numérique définie sur $]1;+\infty[$ par : $h(x)=\dfrac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

1) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1;+\infty[$ et que $\alpha\in]1;2[$.
2) Vérifier que : $\alpha=\sqrt[3]{2\alpha^2-\alpha+1}$.

C) Soit f la fonction numérique définie sur $I=[1;+\infty[$ par : $f(x)=x\sqrt{x^2-1}$

1) Justifier la continuité de la fonction f sur I.
2) Montrer que f est strictement croissante sur I.
3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
4) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in I$.

Série 2 : continuité 2 bac pc svt ste

Exercice 8

A) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x+60}-\sqrt{x+12}}{x-4}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x^3+x}-\sqrt[3]{2}\,x\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{2-x}}\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(4x)}{\tan x.\sin 3x}\ ;\ \lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}$$

B) Étudier la continuité de la fonction f au point x_0 dans les deux cas suivants :

1) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x-1} & \text{si } x<1 \\ f(x)=\sqrt{x^3-x+36} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ et $x_0=1$.

2) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x^2-9|}{x^2-3x} & \text{si } x\neq 3 \\ f(3)=3 \end{cases}$ et $x_0=3$.

Exercice 9

C) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x)=x^3+2x-\frac{1}{x}-4$$

1) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}_+^*$ et que $1<\alpha<2$.

2) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Montrer qu'il existe un unique élément $c\in\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $g(c)=\cos c$.

(On donne : $g\left(\frac{\pi}{4}\right)\approx -4,2$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right)\approx 0,9$)

D) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$$

1) Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

4) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in I$.

Exercice 10

EXERCICE 65

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^4-5x^2-24=0$; 2) $x^6+3x^3-4=0$

3) $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=2$; 4) $5x-4\sqrt[3]{x}-1=0$

5) $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$; 6) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=12$

EXERCICE 66

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $4x^3-125\geq 0$; 2) $\sqrt{2x+1}<3+\sqrt{x+2}$

3) $\sqrt[3]{x^2+8}-2<x$; 4) $x+1>\sqrt[3]{x^2+1}$

5) $\sqrt[3]{(x-2)(x^2-x+3)}>x-2$; 6) $16x^4<25$

7) $\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-2}>1$; 8) $\sqrt[3]{x^3-3x^2+x+1}\geq x-1$

Exercice 11

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x}-1}\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{2-x}\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x}-1}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt[3]{x+6}}{3-\sqrt{2x+5}}\ ;\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt[4]{x}-1}\ ;\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{5-x}-1}{2-\sqrt[3]{x+4}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}\ ;\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-\sqrt{x+2}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-2x\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^3-x}-\sqrt[3]{x^3+2x}}{x}$$