ZAKARIA
Bouicha
WtSp: 0617074062

Les suites numériques

2Bac pc-svt

Ex1 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0=\frac{5}{4} \quad \text{et} \quad u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{3}{2} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

1) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n<2$.

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $v_n=u_n-2$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n=2-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

puis déterminer la limite de la suite (u_n).

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n=u_0+u_1+\dots+u_{n-1}$.

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ S_n=2n-1+\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

b) En déduire la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Ex2 :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0=1 \quad \text{et} \quad u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{u_n+2} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

1) Calculer u_0 et u_1.

2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $1\le u_n<2$.

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n) puis en déduire qu'elle est convergente.

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $v_n=\frac{u_n+1}{u_n-2}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $S_n=v_0+v_1+\dots+v_n$.

Exprimer S_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Ex3 :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0=3 \quad \text{et} \quad u_{n+1}=\sqrt{u_n+12} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\le u_n\le 4$.

2) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-u_n=-\frac{(u_n-4)(u_n+3)}{\sqrt{u_n+12}+u_n}$$

Puis déterminer la monotonie de la suite (u_n).

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ |u_{n+1}-4|\le\frac{1}{4}|u_n-4|$

b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ |u_n-4|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$

c) Calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Ex4 :

Soit f la fonction définie sur $I=\left[0;\frac{1}{4}\right]$ par :

$$f(x)=x^2+\frac{3}{4}x$$

1) Déterminer $f(I)$.

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0=\frac{1}{5} \quad \text{et} \quad u_{n+1}=f(u_n) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 0\le u_n\le\frac{1}{4}$

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

c) En déduire que (u_n) est convergente.

d) Calculer la limite de la suite (u_n).

Ex 5 :

Soit f la fonction numérique définie sur $I=[0;2]$

par : $$f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x}$$

1) Montrer que f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I.

2) Déterminer $f(I)$.

3) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1}=f(u_n) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}) \quad 0\le u_n\le 2$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente.

d) Calculer la limite de la suite (u_n).

Ex 6 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0=2 \quad \text{et} \quad u_{n+1}=\frac{5u_n-1}{u_n+3} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

et soit f la fonction numérique définie sur $I=[1;+\infty[$

par : $$f(x)=\frac{5x-1}{x+3}$$

1) Montrer que f est strictement croissante sur I et en déduire que : $f([1;+\infty[)\subset[1;+\infty[$

2) Montrer que : $(\forall x\in I) \quad f(x)-x=-\frac{(x-1)^2}{x+3}$

puis en déduire que : $(\forall x\in I) \quad f(x)\le x$

3) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}) \quad u_n>1$

4) Montrer que la suite (u_n) est décroissante puis en déduire qu'elle est convergente.

5) Calculer la limite de la suite (u_n).

6) Soit (v_n) la suite définie par : $v_n=\frac{1}{u_n-1}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $r=\frac{1}{4}$.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c) Retrouver la limite de la suite (u_n).

Ex 7 :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0=1 \quad \text{et} \quad u_n=\frac{u_{n-1}+5}{3} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

et soit $(v_n)_{n\ge1}$ la suite définie par : $v_n=\frac{u_n-u_{n-1}}{3}$.

1) Montrer que la suite $(v_n)_{n\ge1}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

2) Exprimer v_n en fonction de n.

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n=v_1+v_2+\ldots+v_n$.

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \quad u_n=3S_n+1$

b) Exprimer S_n et u_n en fonction de n.

c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Examen Bac 2002 (Session De Février)

Ex 8 :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0=1 \quad \text{et} \quad u_{n+1}=\frac{u_n^3}{3u_n^2+1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}) \quad u_n>0$.

b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2) a) Démontrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}) \quad u_{n+1}\le\frac{1}{3}u_n$.

b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}) \quad u_n\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$

puis calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Examen National 2004 (Session De Rattrapage)

Ex 9 :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+) \quad g(x)\le x$.

b) Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire que $g(\mathbb{R}^+)=[0;1[$.

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1}=g(u_n) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

a) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}) \quad 0<u_n<1.$$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Examen Bac 1999 (Session De Février)