Chapitre 1 : Cinétique des solides

I. Masse et Inertie

I.1. Notion d'inertie :

Nous savons, par expérience, qu'il est plus « difficile » d'accélérer un camion qu'une moto comme il est plus « difficile » de le freiner. L'inertie caractérise la résistance qu'oppose un corps par sa nature propre à une variation de mouvement.

Pour un **mouvement de translation**, **la masse** suffit pour définir cette quantité, cependant pour un mouvement de rotation, il est nécessaire de préciser **la répartition de cette masse**. **La cinétique** est l'étude des **caractéristiques d'inertie** d'un solide.

I.2. Masse – Rappels

La masse caractérise la quantité de matière, c'est une grandeur complétement additive. La masse M d' un système ∑ est définie par :

$$\mathbf{M} = \iiint_{\Sigma} \mathbf{dm} = \iiint_{\Sigma} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{P})\mathbf{dv}$$

Avec $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{P})$ masse volumique au point P **et dv** un élément de volume**.**

Remarque :

- Si le système matériel est assimilable à un volume, on parle de masse volumique $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{P})$ [kg.m^{-3}] au point P : dm = $\rho(\mathrm{P})$ dv ;
- Si le système matériel est assimilable à une surface, on parle de masse surfacique σ(P) [kg.m^{-2}] au point P : dm= σ(P) ds ;
- Si le système matériel est assimilable à une ligne, on parle de masse linéique λ(P) [kg.m^{-1}] au point P : dm=$\lambda(P)$ dl

<u>**Principe de conservation de la masse**</u> :

On admet en mécanique classique que la masse est une grandeur indépendante du temps, ainsi pour un ensemble matériel (Σ) qui vérifie le principe de conservation de la masse, soit deux instants t_1 et t_2 quelconque :

$$m(\Sigma, t_1) = m(\Sigma, t_2).$$

<u>**Conséquence :**</u>

Soit (Σ) un ensemble matériel en mouvement par rapport à un repère R.

Soit $\overrightarrow{f\,(P,t)}$ un champs de vecteurs (Peut être un vecteur position, une vitesse, une accélération, vecteur rotation .....) défini à chaque instant t, en tout point P de (Σ) de masse élémentaire dm(P); on peut écrire :

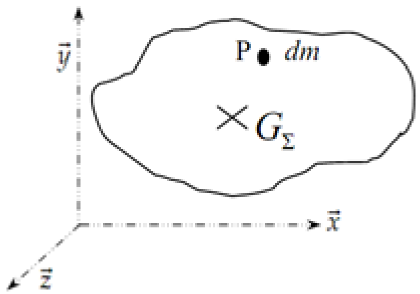
$$\left[\frac{d}{dt}\int_{p\in\Sigma}\overrightarrow{f\,(P,t)}\ dm\right]_R = \int_{p\in\Sigma}\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{f\,(P,t)}\right]_R dm$$

I.3. Centre d'inertie

I.3.1. Définition

Le centre d'inertie d'un ensemble Σ de masse m situé dans un repère R($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) est défini par :

$$\boxed{m.\overrightarrow{OG} = \int_{\Sigma}\overrightarrow{OP}.dm}$$



- En décomposant la formule précédente suivant les 3 axes du repère R on obtient :

$$x_G = \frac{1}{m}\int_\Sigma x\,.dm \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{m}\int_\Sigma y\,.dm \quad \text{et} \quad z_G = \frac{1}{m}\int_\Sigma z\,.dm$$

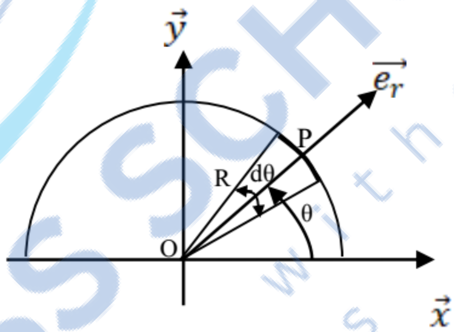
Forme du solide	Expression de **dm**	Centre d'inertie
Volume	$\rho = \frac{m}{v} = \frac{dm}{dv} \rightarrow dm = \rho.dv$	$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{V}\int \overrightarrow{OP}\,.dv$
Surface	$\sigma = \frac{m}{s} = \frac{dm}{ds} \rightarrow dm = \rho.ds$	$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{S}\int \overrightarrow{OP}\,.ds$
Ligne	$\lambda = \frac{m}{L} = \frac{dm}{d\ell} \rightarrow dm = \lambda.d\ell$	$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{L}\int \overrightarrow{OP}.\,d\ell$

Remarque :

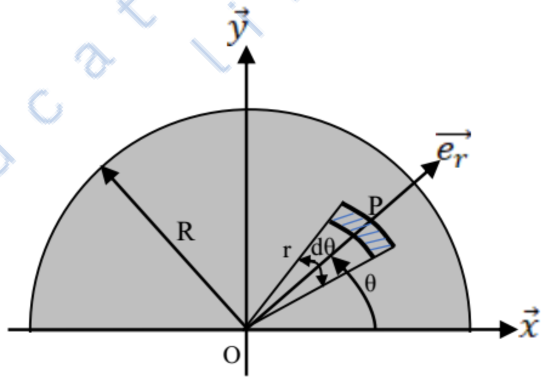
- Si le système matériel possède un élément de symétrie matérielle, plan ou axe de symétrie, aussi bien du point de vue géométrique que du point de vue de la répartition des masses, le centre d'inertie appartient à cet élément de symétrie ;
- Le centre d'inertie est confondu avec centre de gravité dans le cas d'un champ de pesanteur uniforme.

Applications :

1. Détermination du centre de gravité d'un demi-fil homogène de rayon R.



2. Détermination du centre de gravité d'un demi-disque homogène de rayon R



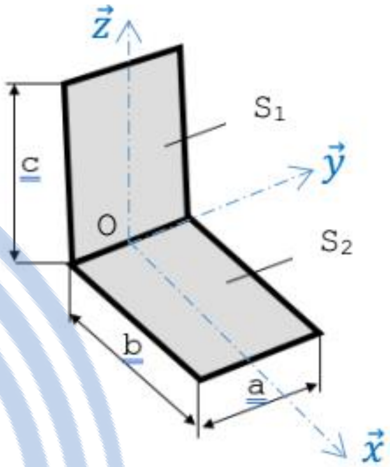
I.3.2. Centre d'inertie d'un ensemble matériel

Pour un système constitué de n solides élémentaires homogènes, dont on connaît pour chacun le centre de gravité Gi et la masse Mi, on peut écrire l'égalité suivante dite du barycentre :

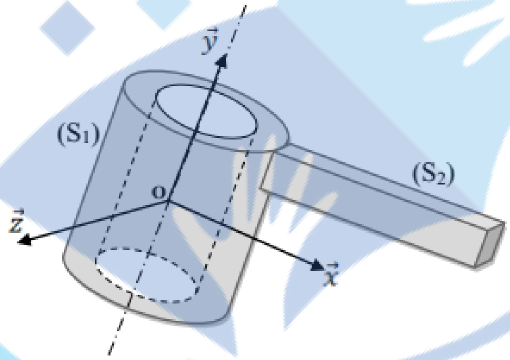
$$m.\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} Mi\,.\overrightarrow{OG_i}$$

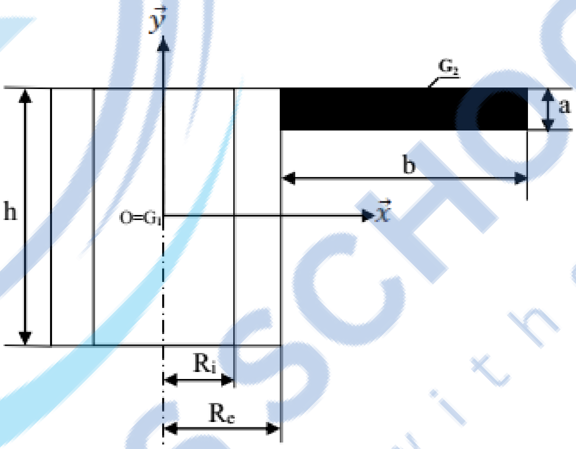
Applications :

1. Le solide (S) est formé de deux plaques planes homogènes (S1) et (S2) de même matériau et d'épaisseur négligeable. Déterminer la position de son centre de gravité.



2. Déterminer le centre d'inertie du solide (S) composé d'un cylindre creux (S1) et d'un parallélépipède (S2).





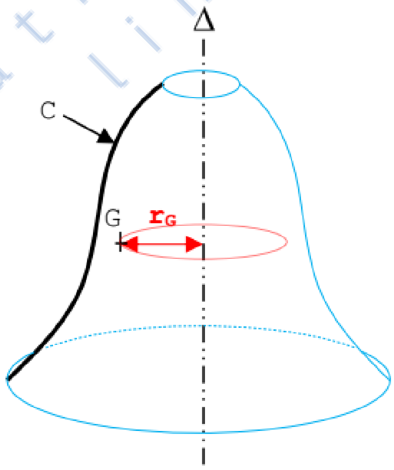
I.3.3. Théorèmes de Guldin

L'utilisation de théorème de Guldin permet de simplifier le calcul de la position du centre d'inertie pour les solides ayant un axe de révolution.

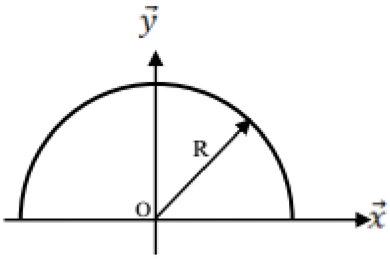
a) Premier théorème de Guldin

L'aire engendrée par une courbe plane tournant autour d'un axe de son plan, ne la traversant pas, est égale au produit de la longueur de la courbe par le périmètre du cercle décrit par son centre d'inertie.

$$\boxed{S = 2\,\pi\,.r_G\,.l}$$

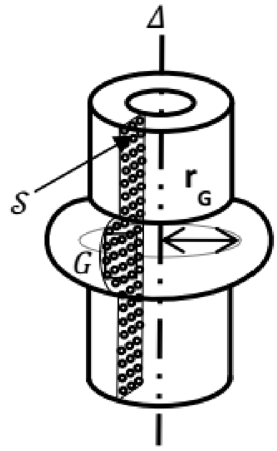


Application : déterminer le centre de gravité du fil en demi-cercle de rayon R.



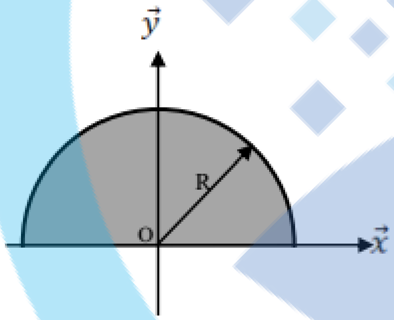
b) **Deuxième théorème de Guldin :**

Le volume engendré par une surface plane tournant autour d'un axe de son plan, ne la traversant pas, est égal au produit de l'aire de la surface par le périmètre du cercle décrit par son centre d'inertie.



$$\boxed{V = 2\,\pi\,.r_G\,.S}$$

Application : déterminer le centre de gravité du demi-disque de rayon R.



II. Moment d'inertie

La masse ne suffit pour caractériser l'inertie que dans le cas d'un mouvement de translation. Pour un mouvement de rotation ou un mouvement plus complexe, il faut prendre en compte la répartition de cette masse sur le solide. **Les moments et produits d'inertie** caractérisent cette répartition.

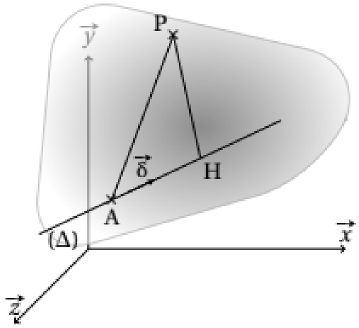
Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe, dépend :

- *De son matériau (masse) ;*
- *De sa géométrie (répartition et distance de tous les points matériels du solide).*

II.1. Moment d'inertie par rapport à un point

On appelle moment d'inertie du solide (S) par rapport à un point A la quantité positive :

$$I_A(S) = \int_S \overrightarrow{AP}^2\,dm \qquad [Kg.m^2]$$



II.2. Moment d'inertie par rapport à une droite

On appelle moment d'inertie du solide (S) par rapport à une droite $\Delta(A,\vec{\delta})$ la quantité positive :

$$\mathrm{I}_{\Delta}(\mathrm{S}) = \int_{s} (\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AP}})^2 \,\mathrm{dm}$$

En faisant intervenir le point H, projection du point P sur la droite (Δ), on déduit que :

$$\mathrm{I}_{\Delta}(\mathrm{S}) = \int_{s} (\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AP}})^2 \,\mathrm{dm} = \int_{s} \overrightarrow{\mathrm{PH}}^2 \,\mathrm{dm}$$

II.3. Moments d'inertie Dans un repère cartésien

Soit un repère R($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$), et P un point quelconque de (S). Posons : $\overrightarrow{OP} = x\,\vec{x} + y\,\vec{y} + z\,\vec{z}$

- Moment d'inertie du solide (S) par rapport au point O :

$$\mathrm{I_o}(\mathrm{S}) = \int_{s} \overrightarrow{\mathrm{OP}}^2 \,\mathrm{dm} = \int_{s} (\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2) \,\mathrm{dm}$$

- Moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe $(O,\vec{\mathrm{x}})$:

$$\mathrm{I}_{(O,\vec{\mathrm{x}})}(\mathrm{S}) = \int_{s} (\vec{x} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OP}})^2 \,\mathrm{dm} = \int_{s} (\vec{x} \wedge x\,\vec{x} + y\,\vec{y} + z\,\vec{z})^2 \,\mathrm{dm} = \int_{s} (\mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2) \,\mathrm{dm}$$

Par analogie, on peut écrire :

$\mathrm{I}_{(O,\vec{\mathrm{x}})}(\mathrm{S}) = \int_s (\mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2)\,\mathrm{dm}$: Moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe $(O,\vec{\mathrm{x}})$

$\mathrm{I}_{(O,\vec{\mathrm{y}})}(\mathrm{S}) = \int_s (\mathrm{x}^2 + \mathrm{z}^2)\,\mathrm{dm}$: Moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe $(O,\vec{\mathrm{y}})$

$\mathrm{I}_{(O,\vec{\mathrm{z}})}(\mathrm{S}) = \int_s (\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2)\,\mathrm{dm}$: Moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe $(O,\vec{\mathrm{z}})$

Relation entre les moments d'inertie

$$\mathrm{I_o}(\mathrm{S}) = \frac{1}{2}(\mathrm{I}_{(O,\vec{\mathrm{x}})} + \mathrm{I}_{(O,\vec{\mathrm{y}})} + \mathrm{I}_{(O,\vec{\mathrm{z}})})$$

II.4. Produits d'inertie

Les produits d'inertie caractérisent l'absence de la symétrie dans la répartition de la masse. La détermination des produits d'inertie sera déduite du calcul de l'opérateur d'inertie.

III. Opérateur d'inertie d'un solide

L'opérateur d'inertie permet de synthétiser l'ensemble des caractéristiques d'inertie d'un solide. Cet opérateur est une fonction linéaire et peut être représenté par **une matrice**.

III.1. Définition :

L'opérateur d'inertie d'un solide **S** en un point **O** est l'opérateur qui, à tout vecteur $\vec{u}$ fait correspondre le vecteur :

$$\overrightarrow{J_O}(s,\vec{u}) = \int_{s} \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OP}})\,\mathrm{dm}$$

III.2. Matrice d'inertie

L'opérateur d'inertie est linéaire, donc représentable par une matrice. On peut écrire :

$$\overrightarrow{J_O}(s,\vec{u}) = \overline{\overline{I_O}}(S)\,.\vec{u}$$

Avec $\overline{\overline{I_O}}(S)$ est appelée **matrice d'inertie** de S au point O par rapport à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Cherchons la matrice d'inertie $\overline{\overline{I_O}}(S)$.

Soit :

- $R(O,\vec{x}, \vec{y},\vec{z})$ un repère, et $(\vec{x}, \vec{y},\vec{z})$ une base ;
- P, un point du solide S, avec $\overrightarrow{OP} = x\,\vec{x} + y\,\vec{y} + z\,\vec{z}$;
- $\vec{u} = \alpha\,\vec{x} + \beta\,\vec{y} + \gamma\,\vec{z}$, un vecteur

Déterminons $\overrightarrow{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP})$:

$$\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right) =$$

$$(x\cdot\vec{x}+y\cdot\vec{y}+z\cdot\vec{z}) \wedge ((\alpha\cdot\vec{x}+\beta\cdot\vec{y}+\gamma\cdot\vec{z}) \wedge (x\cdot\vec{x}+y\cdot\vec{y}+z\cdot\vec{z})) =$$

$$\begin{aligned} &\left(+\alpha\cdot(y^2+z^2) \quad -\beta\cdot x\cdot y \quad -\gamma\cdot x\cdot z\right)\vec{x} \\ +&\left(-\alpha\cdot x\cdot y \quad +\beta\cdot(z^2+x^2) \quad -\gamma\cdot y\cdot z\right)\vec{y} \\ +&\left(-\alpha\cdot x\cdot z \quad -\beta\cdot y\cdot z \quad +\gamma\cdot(x^2+y^2)\right)\vec{z} \end{aligned}$$

En intégrant sur le solide S :

$$\int_{P\in S} \overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right)\cdot dm =$$

$$\begin{aligned} &\left(+\alpha\cdot\int_{P\in S}(y^2+z^2)\cdot dm \quad -\beta\cdot\int_{P\in S}x\cdot y\cdot dm \quad -\gamma\cdot\int_{P\in S}x\cdot z\cdot dm\right)\vec{x} \\ +&\left(-\alpha\cdot\int_{P\in S}x\cdot y\cdot dm \quad +\beta\cdot\int_{P\in S}(z^2+x^2)\cdot dm \quad -\gamma\cdot\int_{P\in S}y\cdot z\cdot dm\right)\vec{y} \\ +&\left(-\alpha\cdot\int_{P\in S}x\cdot z\cdot dm \quad -\beta\cdot\int_{P\in S}y\cdot z\cdot dm \quad +\gamma\cdot\int_{P\in S}(x^2+y^2)\cdot dm\right)\vec{z} \end{aligned}$$

On peut mettre ce résultat sous la forme du produit d'une matrice et du vecteur $\vec{u}$

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}}\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix} +\int_{P\in S}(y^2+z^2)\cdot dm & -\int_{P\in S}x\cdot y\cdot dm & -\int_{P\in S}x\cdot z\cdot dm \\ -\int_{P\in S}x\cdot y\cdot dm & +\int_{P\in S}(z^2+x^2)\cdot dm & -\int_{P\in S}y\cdot z\cdot dm \\ -\int_{P\in S}x\cdot z\cdot dm & -\int_{P\in S}y\cdot z\cdot dm & +\int_{P\in S}(x^2+y^2)\,dm \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Cette matrice est caractéristique de la répartition de la matière d'un solide au tour d'un point et dans une base donnée. On peut pour chaque solide définir une matrice d'inertie.

- **Par convention, on pose :**

$$\overline{\overline{I_O}}(S) = \begin{pmatrix} A_O & -F_O & -E_O \\ -F_O & B_O & -D_O \\ -E_O & -D_O & C_O \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

On reconnaît sur la diagonale de la matrice :

$A_O = I_{(O,\vec{x})}(S) = \int_S (y^2 + z^2)\, dm$: Moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe $(O,\vec{x})$

$B_O = I_{(O,\vec{y})}(S) = \int_S (x^2 + z^2)\, dm$: Moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe $(O,\vec{y})$

$C_O = I_{(O,\vec{z})}(S) = \int_S (x^2 + y^2)\, dm$: Moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe $(O,\vec{z})$

Par convention on pose :

$D_O = \int_S y.z\ dm$: Le produit d'inertie du solide (S) par rapport au plan $(O,\vec{y},\vec{z})$

$E_O = \int_S x.z\ dm$: Le produit d'inertie du solide (S) par rapport au plan $(O,\vec{x},\vec{z})$

$F_O = \int_S x.y\ dm$: Le produit d'inertie du solide (S) par rapport au plan $(O,\vec{x},\vec{y})$

Remarque :

- Une matrice d'inertie dépend de la base et du point de calcul, il est donc important de préciser ces données ;
- La matrice d'inertie est une matrice symétrique ;

III.3. Détermination du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque

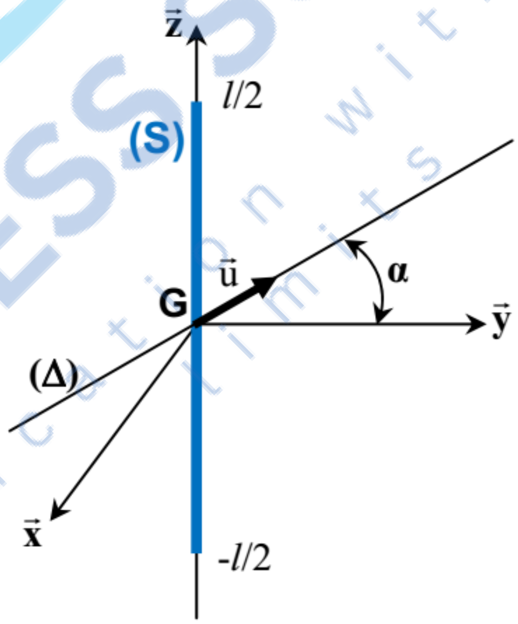
Soit un solide (S) dont la matrice d'inertie $I_O(S)$ est définie au point O. Soit un axe $\Delta(O,\vec{u})$ quelconque passant par O l'origine du repère $R(O,\vec{x},\ \vec{y},\vec{z})$.

Le moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe $\Delta(O,\vec{u})$ est :

$$\boxed{I_\Delta(S) = \vec{u}\,.\overline{\overline{I_O}}(S)\,.\vec{u}}$$

Application :

(S) : tige rectiligne, homogène, de masse m, de longueur l, de diamètre négligeable et de centre d'inertie G ;
$R(G,\vec{x},\ \vec{y},\vec{z})$ repère lié à (S).



1) Déterminer en fonction de m et l la matrice d'inertie de (S) au point G dans la base $(\vec{x},\ \vec{y},\vec{z})$

2) Déterminer le moment d'inertie de la tige (S) par rapport à l'axe $\Delta(G,\vec{u})$ tel que le vecteur unitaire est situé $\vec{u}$ dans le plan $(G,\vec{x},\ \vec{y})$ et $\alpha = (\vec{y},\vec{u})$

III.4. Propriétés de la matrice d'inertie

III.4.1. Matrice et base principale d'inertie

La matrice d'inertie étant symétrique → diagonalisable. Il existe donc, pour tout solide de forme quelconque, une base principale d'inertie dans laquelle la matrice d'inertie prend la forme simplifiée suivante :

$$\overline{\overline{I_O}}(S) = \begin{pmatrix} A_P & 0 & 0 \\ 0 & B_P & 0 \\ 0 & 0 & C_P \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_P},\overrightarrow{y_P},\overrightarrow{z_P})}$$

Les vecteurs unitaires de cette base sont les vecteurs propres de la matrice d'inertie et les termes diagonaux sont les valeurs propres correspondantes.

- Les axes $(O,\overrightarrow{x_P})$,$(O,\overrightarrow{y_P})$, $(O,\overrightarrow{z_P})$ sont appelés axes principaux d'inertie du solide S au point O.
- Les moments d'inertie A_P, B_P, C_P sont appelés moments principaux d'inertie du solide S au point O.

III.4.2. Influence des symétries sur la forme de la matrice d'inertie

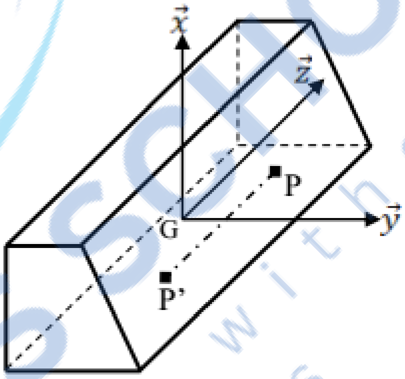
a) Solide avec un plan de symétrie :

Lorsque le solide possède un plan de symétrie, les produits d'inertie comportant la normale au plan de symétrie sont nuls.

Un plan de symétrie permet d'annuler deux produits d'inertie comportant la normale à ce plan.

Exemple :

Le plan $(G,\vec{x},\ \vec{y})$ est plan de symétrie :



On décompose le solide (S) en deux demi solides symétriques (S1) et (S2), donc à chaque point P(x, y, z) ϵ S1 correspond symétriquement un point P'(x, y,-z) ϵ S2.

$$D = \int_S y.z.dm = \int_{S_1} y.z.dm + \int_{S_2} y.z.dm.$$

On effectue un changement de variable z → -z pour calculer la deuxième intégrale d'où :

$$\int_{S_2} y.z.dm = -\int_{S_1} y.z.dm \quad \Rightarrow \quad D=0$$

On démontre de même E=0.

L'axe $(\boldsymbol{O},\vec{\boldsymbol{z}})$ perpendiculaire au plan de symétrie est **un axe principal d'inertie**.

Donc : $\overline{\overline{I_O}}(S) = \begin{pmatrix} A_O & -F_O & 0 \\ -F_O & B_O & 0 \\ 0 & 0 & C_O \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

b) Solide avec deux plans de symétrie :

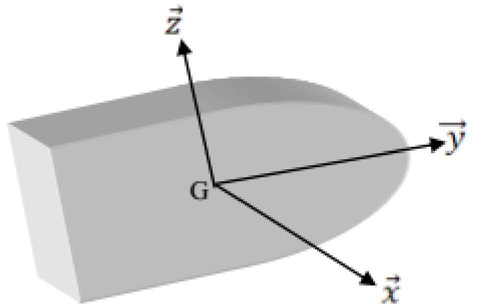
Si un solide possède **deux plans de symétrie**, en choisissant d'écrire la matrice d'inertie en un point O de la droite d'intersection des deux plans et dans une base respectant cette symétrie, alors **les trois produits d'inertie sont nuls** :

La matrice est donc diagonale : $\overline{\overline{I_O}}(S) = \begin{pmatrix} A_O & 0 & 0 \\ 0 & B_O & 0 \\ 0 & 0 & C_O \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Exemple

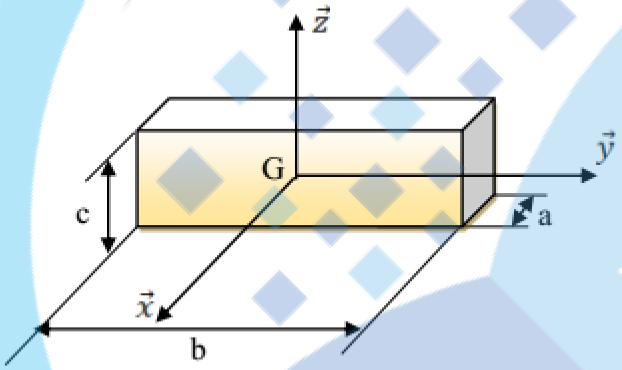
$(G,\vec{x},\vec{y})$ et $(G,\vec{y},\vec{z})$ sont les deux plans de symétrie :

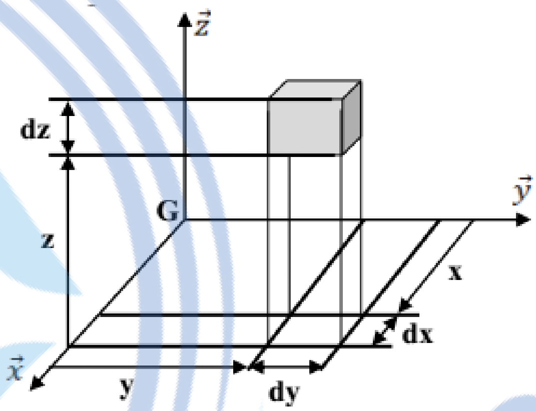
- plan $(G,\vec{x},\vec{y}) \rightarrow$ D=0 et E=0 (effets des z de signes opposés)
- plan $(G,\vec{y},\vec{z}) \rightarrow$ E=0 et F=0 (effets des y de signes opposés)



Application :

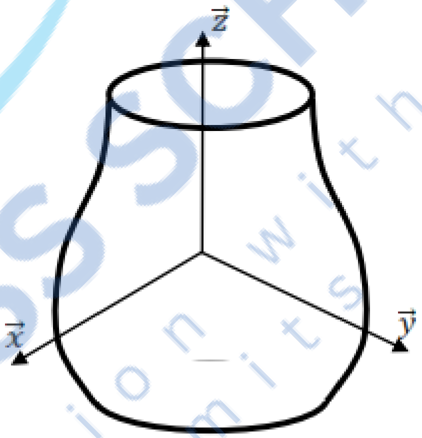
Détermination de la matrice d'inertie d'un parallélépipède rectangle au centre d'inertie G.





c) Solide avec axe de révolution :

Tout plan passant par l'axe de révolution est un plan de symétrie ; La matrice est donc diagonale dans toute base contenant l'axe de révolution et en tout point de cet axe.



Pour l'exemple ci-contre l'axe $\vec{z}$ est l'axe de révolution.

Les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont interchangeables sans modification de la disposition de la matière, donc les moments d'inertie par rapport aux axes et sont égaux.

$$A = \int_S (y^2 + z^2)dm = \int_S (x^2 + z^2)dm = B$$

$$C = \int_S (x^2 + y^2)dm = 2.A - 2.\int_S z^2 dm \Rightarrow A = \frac{C}{2} + \int_S z^2 dm$$

Le solide a donc une matrice d'inertie de la forme : $\overline{\overline{I_O}}(S) = \begin{pmatrix} A_O & 0 & 0 \\ 0 & A_O & 0 \\ 0 & 0 & C_O \end{pmatrix}_{(-,-,\ \vec{z})}$

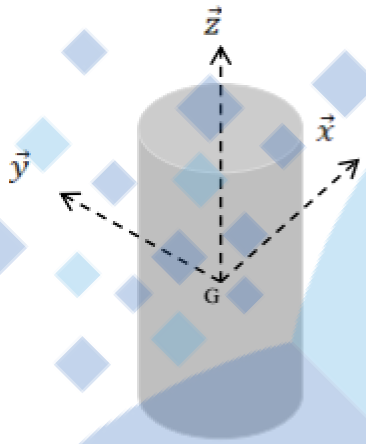
La notation $(-,\ -,\ \vec{z})$ indique que la matrice d'inertie reste la même dans toute base orthonormée admettant l'axe $\vec{z}$ comme troisième vecteur.

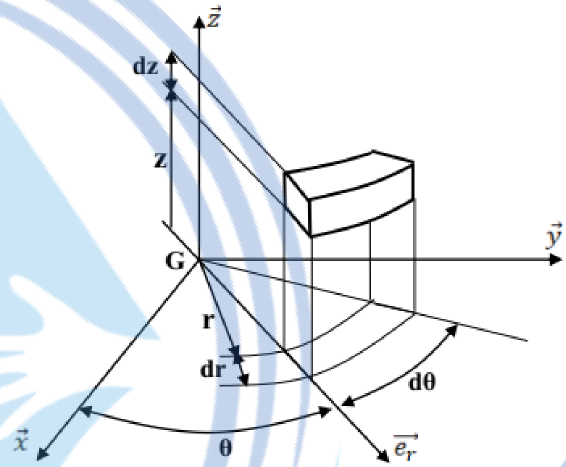
Par analogie, on peut écrire :

$(O,\vec{x})$ est un axe de révolution	$(O,\vec{y})$ est un axe de révolution	$(O,\vec{z})$ est un axe de révolution
$\bar{\bar{I}}_O(S)=\begin{pmatrix} A_O & 0 & 0 \\ 0 & B_O & 0 \\ 0 & 0 & B_O \end{pmatrix}_{(\vec{x},-,-)}$ Avec $B=\frac{A}{2}+\int_S x^2\,dm$	$\bar{\bar{I}}_O(S)=\begin{pmatrix} A_O & 0 & 0 \\ 0 & B_O & 0 \\ 0 & 0 & A_O \end{pmatrix}_{(-,\vec{y},-)}$ Avec $A=\frac{B}{2}+\int_S y^2\,dm$	$\bar{\bar{I}}_O(S)=\begin{pmatrix} A_O & 0 & 0 \\ 0 & A_O & 0 \\ 0 & 0 & C_O \end{pmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$ Avec $A=\frac{C}{2}+\int_S z^2\,dm$

Application :

Détermination de la matrice d'inertie au centre d'inertie G d'un cylindre de révolution plein de rayon R et de hauteur H.

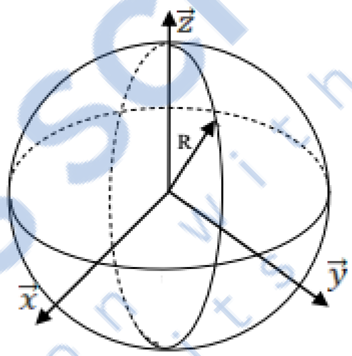




d) Solide avec centre de symétrie :

Le centre de symétrie est l'intersection d'une infinité d'axes de révolution que possède le solide.

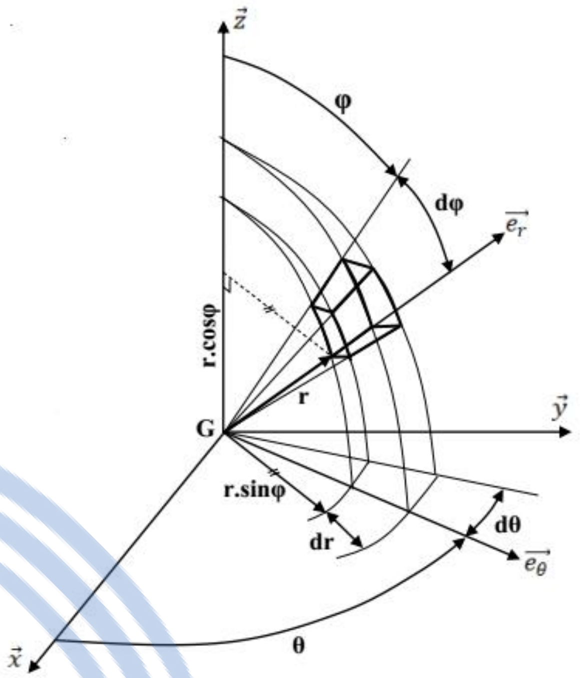
Les produits d'inertie sont nuls et les moments d'inertie sont égaux, donc la matrice est exprimée au centre de symétrie et dans toute base s'écrit sous la forme suivante : $I_G(S)=\begin{pmatrix} A_G & 0 & 0 \\ 0 & A_G & 0 \\ 0 & 0 & A_G \end{pmatrix}_{(-,-,-)}$



Exemple : Sphère creuse de rayon R de centre G.

Application :

Détermination de la matrice d'inertie d'une sphère pleine de rayon R au centre d'inertie G.



III.5. Changement de point. Théorème de Huygens généralisé

Le théorème de Huygens généralisé permet la recherche de la matrice d'inertie en un point quelconque A à partir de la matrice d'inertie au point G (centre de gravité du solide).

Soit G le centre d'inertie du solide S, On peut montrer que :

$$\boldsymbol{I_A(S) = I_G(S) + I_A(m, G)}$$

Matrice d'inertie de S en A

Matrice d'inertie de S en G

Matrice d'inertie calculée en A en considérant que toute la masse est concentrée en G

Soit $\overrightarrow{AG} = x_G\,\vec{x} + y_G\,\vec{y} + z_G\,\vec{z}$, donc :

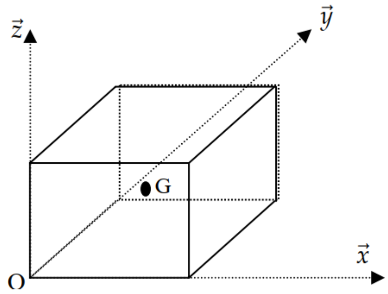
$$\boldsymbol{I_A(m,G) = m\begin{pmatrix} y_G{}^2 + z_G{}^2 & -x_G.y_G & -x_G.z_G \\ -x_G.y_G & x_G{}^2 + z_G{}^2 & -y_G.z_G \\ -x_G.z_G & -y_G.z_G & x_G{}^2 + y_G{}^2 \end{pmatrix}}$$

Ceci veut dire :

$$\Rightarrow \begin{cases} A_A = A_G + m(y_G{}^2 + z_G{}^2) \\ B_A = B_G + m(z_G{}^2 + x_G{}^2) \\ C_A = C_G + m(x_G{}^2 + y_G{}^2) \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} D_A = D_G + m y_G z_G \\ E_A = E_G + m z_G x_G \\ F_A = F_G + m x_G y_G \end{cases}$$

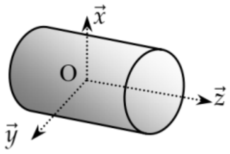
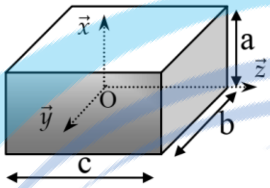
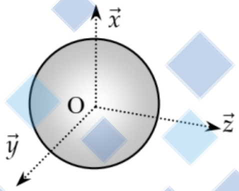
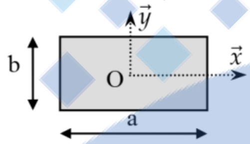
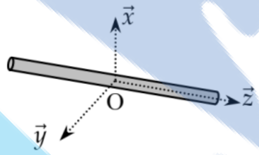
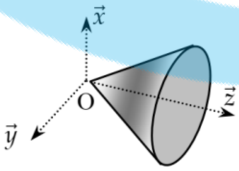
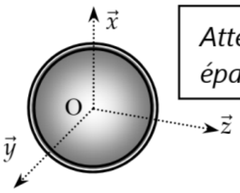
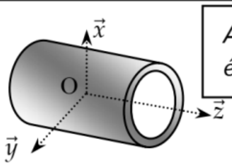
Application :

Calculer au point O puis au point G (centre d'inertie) les éléments de la matrice d'inertie du cube S de côté « a » et masse « m », dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.



A retenir

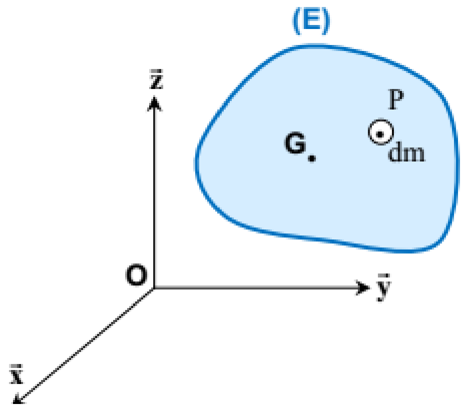
MATRICES D'INERTIE DES SOLIDES A FORMES USUELLES :

Corps homogène de masse « m »	Centre d'inertie	Matrice d'inertie en $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$
 Cylindre plein de rayon R et hauteur h	Centre	$\begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4}+\frac{mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4}+\frac{mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}$
 Parallélépipède de cotés axbxc	Centre	$\begin{pmatrix} \frac{m(b^2+c^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(a^2+c^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} \end{pmatrix}$
 Sphère pleine	Centre	$\begin{pmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{pmatrix}$
 Rectangle axb	Centre	$\begin{pmatrix} \frac{mb^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} \end{pmatrix}$
 Tige longueur L	Centre	$\begin{pmatrix} \frac{mL^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 Cône plein rayon R, hauteur h	$z_G=\frac{3}{4}h$	$\begin{pmatrix} \frac{3m}{5}\left(\frac{R^2}{4}+h^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3m}{5}\left(\frac{R^2}{4}+h^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3m}{5}.\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}$
 Sphère creuse	Attention : solide à épaisseur négligeable Centre	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 \end{pmatrix}$
 Cylindre creux de rayon R et hauteur h	Attention : solide à épaisseur négligeable Centre	$\begin{pmatrix} \frac{mR^2}{2}+\frac{mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2}+\frac{mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}$

IV. Torseur cinétique

IV.1. Définition

Soit (E) un ensemble matériel de masse m et de centre d'inertie G en mouvement par rapport à un repère $R(O,\vec{x},\ \vec{y},\vec{z})$:



$$\{C_{(E/R)}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_C}\\ \overrightarrow{\sigma_{A\in(E/R)}}\end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\int_{P\in E}\overrightarrow{V(P/R)}.dm\\ \int_{P\in E}\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{V(P/R)}.dm\end{matrix}\right\}$$

Avec :

- P : point courant de (E).
- $\overrightarrow{V(P/R)}$: Vitesse du point P du système matériel E dans son mouvement par rapport au repère R ;
- $\overrightarrow{R_C} = \int_{P\in E}\overrightarrow{V(P/R)}.dm$: résultante cinétique de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère R. (Unité Kg.m/s)
- $\overrightarrow{\sigma_{A\in(E/R)}} = \int_{P\in E}\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{V(P/R)}.dm$: est le moment cinétique au point A de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère R

IV.2. Expressions pratiques

a) Résultante cinétique

Soit O l'origine du repère R et G le centre d'inertie de l'ensemble matériel (E) : $m.\overrightarrow{OG} = \int_E \overrightarrow{OP}.dm$

En dérivant par rapport à t dans R : ……………………………………………………………………………………………

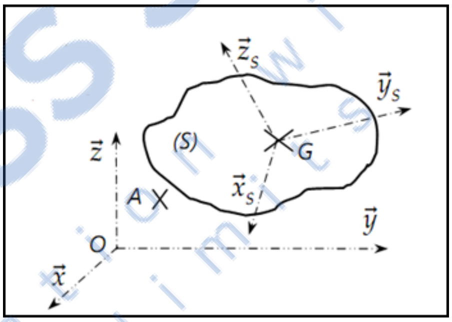
Et d'après le principe de conservation de la masse : ………………………………………………………………

Et finalement : $\boxed{\overrightarrow{R_C} = m\,\overrightarrow{V(G/R)}}$

b) Moment cinétique

Soit un solide (S) de masse m, de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère $R(O,\vec{x},\ \vec{y},\vec{z})$.

Soit A un point lié au solide (S). On peut écrire :



$$\vec{V}(P\in S/R) = \vec{V}(A\in S/R) + \vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}$$

Nous avons : $\overrightarrow{\sigma_{A\in(S/R)}} = \int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{V(P/R)}.dm$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} &= \int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\left(\overrightarrow{V(A\in S/R)}+\overrightarrow{PA}\wedge\overrightarrow{\Omega(S/R)}\right).dm\\
&= \int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\left(\overrightarrow{V(A\in S/R)}+\overrightarrow{PA}\wedge\overrightarrow{\Omega(S/R)}\right).dm\\
&= \int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{V(A\in S/R)}.dm+\int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\left(\overrightarrow{PA}\wedge\overrightarrow{\Omega(S/R)}\right)dm\\
&= m.\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V(A\in S/R)}+\int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\left(\overrightarrow{\Omega(S/R)}\wedge\overrightarrow{AP}\right)dm\\
&= m.\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V(A\in S/R)}+\left[\bar{\bar{I}}_A(S)\right].\left(\overrightarrow{\Omega(S/R)}\right)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_{(A\in S/R)}} = \bar{\bar{I}}_A(S).\overrightarrow{\Omega(S/R)} + m\,\overrightarrow{AG}\wedge\ \overrightarrow{V(A\in S/R)}}$$

Cas particulier :

- ✓ Si A est fixe dans le repère (R) :

$$\overrightarrow{\sigma_{(A\in S/R)}} = \overline{\overline{I_A}}(S).\overrightarrow{\Omega(S/R)}$$

- ✓ Si A est confondu avec G :

$$\overrightarrow{\sigma_{(G\in S/R)}} = \overline{\overline{I_G}}(S).\overrightarrow{\Omega(S/R)}$$

- ✓ Si le mouvement du solide (S) est une translation :

$$\overrightarrow{\sigma_{(A\in S/R)}} = m\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V(A\in S/R)}$$

Remarque :

1) Dans le cas d'un système (Σ) constitué de "n" solides $(\Sigma) \equiv \cup_{i=1}^{n} S_i$,On a :

$$_A\{C_{(\Sigma/R)}\} = \sum_{i=1}^{n} {}_A\{C_{(Si/R)}\}$$

2) Relation de changement de point du moment cinétique :

Le moment cinétique est un champ de moment d'un torseur, donc soient deux point A et B quelconque lié à un solide (S), on peut écrire :

$$\overrightarrow{\sigma_{(A\in S/R)}} = \overrightarrow{\sigma_{(B\in S/R)}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_C}$$

V. Torseur dynamique

V.1. Définition

Soit (E) un ensemble matériel de masse m et de centre d'inertie G en mouvement par rapport à un repère $R(O,\vec{x},\ \vec{y},\vec{z})$:

$$\{D_{(E/R)}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_d}\\ \overrightarrow{\delta_{(A\in E/R)}}\end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\int_{P\in E}\overrightarrow{\Gamma(P/R)}.dm\\ \int_{P\in E}\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{\Gamma(P/R)}.dm\end{matrix}\right\}$$

Avec :

- $\overrightarrow{\Gamma(P/R)}$: Accélération du point P du système matériel E dans son mouvement par rapport au repère R ;
- $\overrightarrow{R_d} = \int_{P\in E}\overrightarrow{\Gamma(P/R)}.dm$: Résultante dynamique de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère R.
- $\overrightarrow{\delta_{(A\in E/R)}} = \int_{P\in E}\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{\Gamma(P/R)}.dm$: est le moment dynamique au point A de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère R

V.2. Expressions pratiques

a) Résultante dynamique

Nous avons : $\overrightarrow{R_d} = \int_{P\in E}\overrightarrow{\Gamma(P/R)}.dm = \int_{P\in E}\frac{d}{dt}[\overrightarrow{V(P/R)}].dm$

Et d'après le principe de conservation de la masse :

$$\overrightarrow{R_d} = \frac{d}{dt}\left[\int_{P\in E} \overrightarrow{V(P/R)}.dm\right] = \frac{d}{dt}\left[m\,\overrightarrow{V(G/R)}\right] = m\,\frac{d}{dt}\overrightarrow{V(G/R)} = m\,\overrightarrow{\Gamma(G/R)}$$

Et Finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{R_d} = m\,\overrightarrow{\Gamma(G/R)}}$$

b) Moment dynamique

Il est souvent plus simple de déduire le moment dynamique du moment cinétique. Pour un solide (S) de masse m, de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère $R(O,\vec{x},\ \vec{y},\vec{z})$.

Nous avons : $\overrightarrow{\delta_{A\in(S/R)}} = \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma(P/R)}.dm$

$$\vec{\delta}_{A(E/R)} = \int_{p\in E} \overrightarrow{AP}\wedge\vec{\Gamma}_{(P/R)}dm = \int_{p\in E}\overrightarrow{AP}\wedge\left[\frac{d(\vec{V}_{(P/R)})}{dt}\right]_R dm = \int_{p\in E}\left[\frac{d\left(\overrightarrow{AP}\wedge(\vec{V}_{(P/R)})\right)}{dt}\right]_R dm - \int_{p\in E}\left[\frac{d(\overrightarrow{AP})}{dt}\right]_R\wedge\vec{V}_{(P/R)}dm$$

$$\Rightarrow\quad \vec{\delta}_{A(E/R)} = \left[\frac{d}{dt}\int_{p\in E}\left(\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}_{(P/R)}\right)dm\right]_R - \int_{p\in E}\left[\frac{d(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})}{dt}\right]_R\wedge\vec{V}_{(P/R)}dm$$

$$\vec{\delta}_{A(E/R)} = \left[\frac{d(\vec{\sigma}_{A(E/R)})}{dt}\right]_R - \int_{p\in E}\left(-\vec{V}_{(A/R)}+\vec{V}_{(P/R)}\right)_R\wedge\vec{V}_{(P/R)}dm$$

$$\Rightarrow\quad = \left[\frac{d(\vec{\sigma}_{A(E/R)})}{dt}\right]_R + \int_{p\in E}\vec{V}_{(A/R)}\wedge\vec{V}_{(P/R)}dm$$

$$\Rightarrow\quad \vec{\delta}_{A(E/R)} = \left[\frac{d(\vec{\sigma}_{A(E/R)})}{dt}\right]_R + \vec{V}_{(A/R)}\wedge\int_{p\in E}\vec{V}_{(P/R)}dm = \left[\frac{d(\vec{\sigma}_{A(E/R)})}{dt}\right]_R + \vec{V}_{(A/R)}\wedge m.\vec{V}_{(G/R)}$$

Et finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_{(A\in S/R)}} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_{(A\in S/R)}}\right)_R + m\,\overrightarrow{V(A\in S/R)}\wedge\overrightarrow{V(G\in S/R)}}$$

<u>Cas particulier :</u>

- ✓ Si A est fixe dans le repère (R) :

$$\overrightarrow{\delta_{(A\in S/R)}} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_{(A\in S/R)}}\right)_R$$

- ✓ Si A est confondu avec G :

$$\overrightarrow{\delta_{(G\in S/R)}} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_{(G\in S/R)}}\right)_R$$

Remarque :

1) Dans le cas d'un système (Σ) constitué de "n" solides $(\Sigma) \equiv \cup_{i=1}^{n} S_i$

On a :

$$_A\{D_{(\Sigma/R)}\} = \sum_{i=1}^{n} {}_A\{D_{(Si/R)}\}$$

2) Relation de changement de point du moment dynamique :

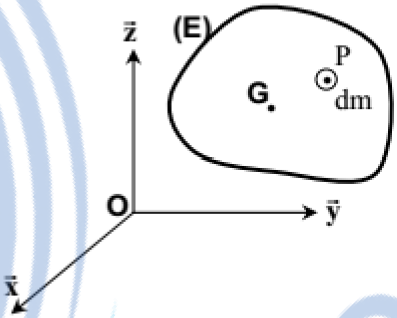
Le moment dynamique est un champ de moment d'un torseur, donc soient deux point A et B quelconque lié à un solide (S), on peut écrire :

$$\overrightarrow{\delta_{(A\in S/R)}} = \overrightarrow{\delta_{(B\in S/R)}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_d}$$

VI. Energie cinétique :

VI.1. Définition

L'énergie cinétique de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport à R est le scalaire suivant :



$$T(E/R) = \frac{1}{2}\int_{P\in E}\left[\overrightarrow{V(P/R)}\right]^2 .dm$$

VI.2. Expressions pratiques

Soit un solide (S) de masse m, de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère $R(O,\vec{x}, \vec{y},\vec{z})$.

Soit A un point lié au solide (S). Par définition on a :

A et P sont deux points de (S) donc :

$$\vec{V}(P/R)=\vec{V}(P\in S/R)=\vec{V}(A\in S/R)+\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}$$

Donc
$$2T(S/R)=\int_{P\in S}\left[\vec{V}(P/R)\right]^2 dm=\int_{P\in S}\vec{V}(P/R).\vec{V}(P/R)\,dm$$

$$=\int_{P\in S}\vec{V}(P/R).\left(\vec{V}(A\in S/R)+\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}\right)dm$$

$$=\int_{P\in S}\vec{V}(P/R).\vec{V}(A\in S/R)\,dm+\int_{P\in S}\vec{V}(P/R).\left(\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}\right)dm$$

$$=\vec{V}(A\in S/R).\int_{P\in S}\vec{V}(P/R)\,dm+\int_{P\in S}\vec{\Omega}(S/R).\left(\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)\right)dm$$

$$=\vec{V}(A\in S/R).\int_{P\in S}\vec{V}(P/R)\,dm+\vec{\Omega}(S/R).\int_{P\in S}\left(\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)\right)dm$$

($\vec{V}(A\in S/R)$ et $\vec{\Omega}(S/R)$ sont indépendant de m)

Donc
$$2T(S/R)=\vec{V}(A\in S/R).m\vec{V}(G/R)+\vec{\Omega}(S/R).\vec{\sigma}_A(S/R)$$

Et finalement :

$$T(S/R)=\frac{1}{2}\,{}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega(S/R)}\\ \overrightarrow{V(A\in S/R)}\end{matrix}\right\}\otimes{}_A\left\{\begin{matrix}m\,\overrightarrow{V(G/R)}\\ \overrightarrow{\sigma_A(S/R)}\end{matrix}\right\}$$

$$\boxed{T(S/R)=\frac{1}{2}\,{}_A\{\upsilon_{(S/R)}\}\otimes{}_A\{C_{(S/R)}\}}$$

L'énergie cinétique est le comoment entre le torseur cinétique et le torseur cinématique.
L'énergie cinétique ne dépend pas du point de calcul du comoment, il est donc préférable d'appliquer cette relation dans des points particuliers :

- **En G, centre d'inertie :**

$$T(S/R) = \frac{1}{2}\left\{\overline{\overline{I_G}}(S)\,.\overrightarrow{\Omega(S/R)}\right\}.\overrightarrow{\Omega(S/R)} + \frac{1}{2}\,m\,\overrightarrow{V(G \in S/R)}^2$$

- **Pour un mouvement de rotation autour d'un point fixe O :**

$$T(S/R) = \frac{1}{2}\left\{\overline{\overline{I_O}}(S)\,.\overrightarrow{\Omega(S/R)}\right\}.\overrightarrow{\Omega(S/R)}$$

- **Pour un mouvement de rotation autour d'un axe fixe $(O,\vec{u})$:**

$$T(S/R) = \frac{1}{2}\,I_u(S)\,.\omega_u^2$$

Avec $I_u(S)$: moment d'inertie du solide (S)/ à l'axe $(O,\vec{u})$ et ω_u : vitesse de rotation du solide (S) / à l'axe $(O,\vec{u})$.

- **Pour un mouvement de translation :**

$$T(S/R) = \frac{1}{2}\,m\,\overrightarrow{V(G \in S/R)}^2 = \frac{1}{2}\,m\,\overrightarrow{V(A \in S/R)}^2$$

Remarque :

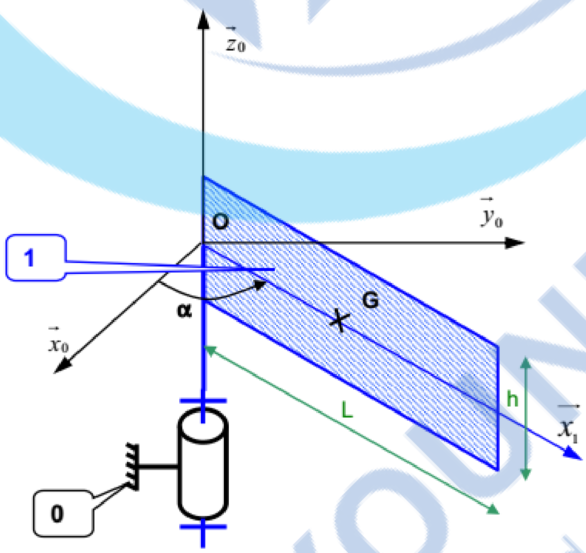
1) Dans le cas d'un système (Σ) constitué de "n" solides $(\Sigma) \equiv \bigcup_{i=1}^{n} S_i$

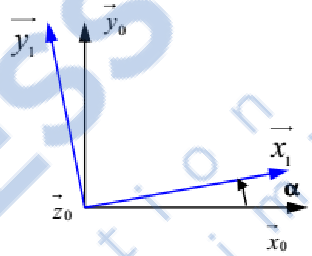
On a :

$$T(\Sigma/R) = \sum_{i=1}^{n} T(Si/R)$$

VI.3. Application :

On considère une plaque homogène d'épaisseur négligeable (longueur L, hauteur h, masse M, centre de gravité G) en mouvement de rotation par rapport à l'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$. La plaque est verticale.





1. Exprimez le torseur cinématique en O puis en G pour la plaque 1.
2. Exprimez le torseur cinétique en O puis en G.
3. Exprimez le torseur dynamique en O puis en G.
4. Calculer l'énergie cinétique de la plaque.

VII. Notion d'Inertie équivalente

VII.1 Définition

Dans le cas d'un système $\boldsymbol{\Sigma}$ comportant plusieurs pièces en rotation à des vitesses de rotation différentes (et éventuellement certaines en translation), on appelle inertie équivalente ramenée à un axe Δ, le moment d'inertie $I_{éq,\Delta}$ que devrait avoir cet axe en rotation pour que l'énergie cinétique totale du système de pièces en rotation soit égale à : $\boldsymbol{T(\Sigma/R)} = \frac{1}{2}\ \boldsymbol{I_{éq}}\ .\boldsymbol{\omega_{\Delta}^2}$ où $\boldsymbol{\omega_{\Delta}}$ représente la vitesse de rotation de l'axe Δ.

Remarque : On peut aussi définir la masse équivalente ramenée sur un axe, en utilisant le même principe.

Intérêt :

L'intérêt d'exprimer une " *inertie équivalente* " est de quantifier l'inertie " *ressentie* " par un moteur entrainant une chaine d'énergie.

Utilité :

L'utilisation d'une inertie équivalente ou d'une masse équivalente permet d'étudier la loi de mouvement de l'une des pièces du mécanisme en tenant compte de l'intégralité de ses pièces.

Méthode de détermination de l'inertie équivalente

Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble des solides

↓

Exprimer les relations cinématiques entre les différents solides

↓

Exprimer l'énergie cinétique de l'ensemble des solides en fonction d'une seule variable cinématique

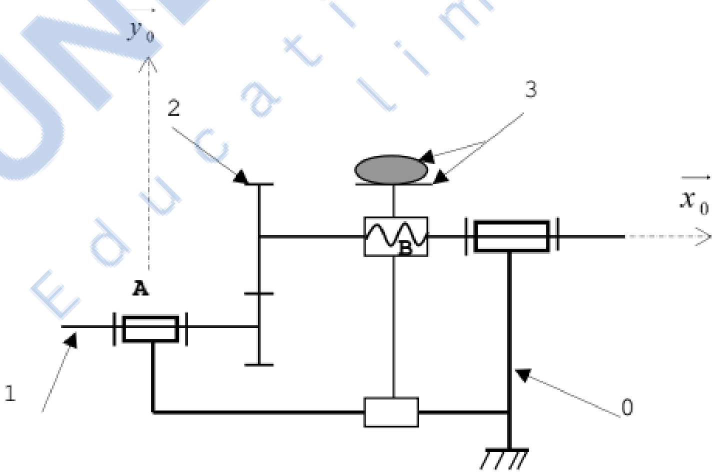
↓

Ecrire l'énergie cinétique de l'ensemble des solides sous la forme : $\frac{1}{2}\ J_{éq}.\omega^2$ ou $\frac{1}{2}\ M_{éq}\ V^2$

VII.2. Exemple d'application :

Le système à étudier est une table de machine permettant de déplacer des charges. Elle est constituée de :

- Bâti 0 : auquel est lié le repère galiléen $R(O,\overrightarrow{x_0},\ \overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$. $\vec{g} = -g\ \overrightarrow{y_0}$;
- Arbre moteur 1 : I_1 moment d'inertie de 1 par rapport à son axe de rotation et Z1 nombre de dents de la roue dentée liée à 1 ;
- Vis 2 : I_2 moment d'inertie de 2 par rapport à son axe de rotation, et Z2 nombre de dents de la roue dentée liée à 2 ;
- Table et charge 3 : de masse M. La liaison hélicoïdale est de pas p à droite.



1. Déterminer le moment d'inertie équivalente ramené sur 1, puis sur 2.
2. Déterminer la masse équivalente ramenée sur 3.