Etude du mouvement de l'oscillateur (corps solide – ressort)

On étudie dans cette partie le mouvement d'un oscillateur mécanique élastique dans deux situations :
- l'oscillateur est horizontal,
- l'oscillateur est vertical.

L'oscillateur mécanique étudié est modélisé par un système (solide-ressort) constitué d'un solide (S) de masse m et d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur K.

On note T_0 la période propre de cet oscillateur.

On étudie le mouvement du centre d'inertie G du solide (S) dans un repère lié à un référentiel terrestre considéré galiléen.

On néglige les frottements et on prend $\pi^2 = 10$.

1-Etude de l'oscillateur mécanique horizontal :

Le ressort est horizontal, une de ses extrémités est fixe. On accroche à son autre extrémité le solide (S). Ce solide peut glisser sur le plan horizontal.

On repère la position de G à un instant t par l'abscisse x sur l'axe $(O,\vec{i})$. A l'équilibre, le centre d'inertie G du solide coïncide avec l'origine O du repère (figure 1).

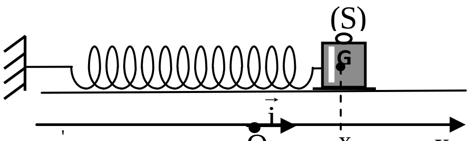

Figure 1

On écarte (S) de sa position d'équilibre et on le lâche sans vitesse initiale à un instant choisi comme origine des dates $(t = 0)$.

La courbe de la figure 2 représente l'évolution au cours du temps de l'accélération a_x du centre d'inertie G.

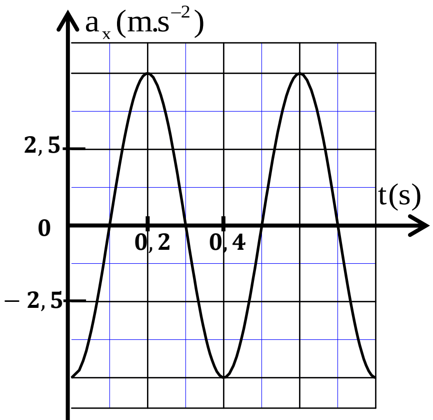

Figure 2

0,25 **1-1-** Etablir, en appliquant la deuxième loi de Newton, l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse $x(t)$.

0,75 **1-2-** La solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right).$$

Déterminer la valeur de x_m et celle de φ.

2- Etude de l'oscillateur mécanique vertical :

On fixe maintenant le ressort étudié comme l'indique la figure 3 ; l'une des deux extrémités du ressort est liée au solide (S) et l'autre est fixée à un support.

On repère la position de G à un instant t par la côte z sur l'axe $(O,\vec{k})$. A l'équilibre, le centre d'inertie G du solide coïncide avec l'origine O du repère $R(O,\vec{k})$ (figure 3).

On écarte, verticalement vers le bas, le corps (S) de sa position d'équilibre stable puis on le libère sans vitesse initiale à un instant choisi comme origine des dates $(t = 0)$. L'oscillateur effectue alors un mouvement oscillatoire selon l'axe (Oz).

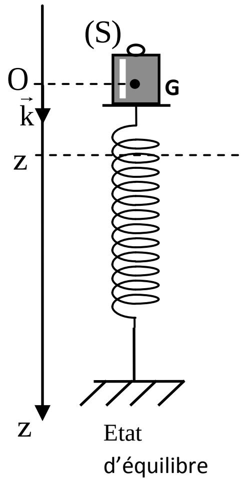

Figure 3

On choisit comme référence $(E_{pp} = 0)$ de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} le plan horizontal auquel appartient le point O et comme référence $(E_{pe} = 0)$ de l'énergie potentielle élastique E_{pe} l'état où le ressort n'est pas déformé.

0,25 **2-1-** Déterminer, à l'équilibre, l'expression de l'allongement $\Delta\ell_0 = \ell - \ell_0$ du ressort en fonction de m, K et de l'intensité de la pesanteur g, avec ℓ la longueur du ressort à l'équilibre et ℓ_0 sa longueur à vide.

0,5 **2-2-**Montrer qu'à un instant t, l'expression de l'énergie potentielle totale E_p de l'oscillateur s'écrit sous la forme :

$E_p = Az^2 + B$ où A et B sont deux constantes.

2-3-La courbe de la figure 4 représente les variations de l'énergie potentielle totale en fonction de la côte z.

0,5 **2-3-1-** Trouver la valeur de $\Delta\ell_0$ et celle de K.

0,5 **2-3-2-**Trouver, en se basant sur la variation de l'énergie potentielle totale E_p, le travail de la force de rappel $\vec{T}$ appliquée par le ressort sur le corps (S) lorsque G se déplace de la position de côte $z_1 = 0$ à la position de côte $z_2 = 1,4\,\text{cm}$.

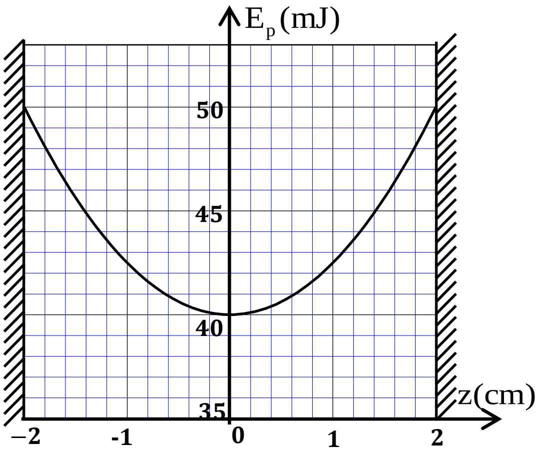

Figure 4