Chapter 6. 내적공간

6.1 내적

(1) 실내적공간

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in R$ 에서 실벡터공간 V 에서 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 와 실수 스칼라 k에 대하여 아래 4가지 공리를 만족할 때 실벡터공간 V 에서의 내적이 존재하고 $< \bar{u}, \bar{v} >$로 내적을 표현합니다

① $< \bar{u}, \bar{v} > = < \bar{v}, \bar{u} >$ (대칭성)

② $< \bar{u} + \bar{v}, \bar{w} > = < \bar{u}, \bar{w} > + < \bar{v}, \bar{w} >$ (합의공리)

③ $< k\bar{u}, \bar{v} > = k < \bar{u}, \bar{v} >$ (동질성 공리)

④ $< \bar{v}, \bar{v} > \geq 0$

$ex)$ R^n의 유클리드 내적(또는 표준내적)은 실내적공간인지 확인하시오

(2) 유클리드 가중내적

$< \bar{u}, \bar{v} > = w_1u_1v_1 + w_2u_2v_2 + w_3u_3v_3 + \cdots\cdots\cdots + w_nu_nv_n$으로 정의될 때 가중치 $w_1, w_2, \cdots\cdots, w_n$을 갖는 유클리드 가중내적 이라고 합니다

이 때, $\bar{u} = (u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n)$이고 $w_1, w_2, \cdots\cdots, w_n$은 실수 스칼라 입니다

$ex)$ 유클리드 가중내적이 실내적공간인지 확인하시오

$ex)$ $< \bar{u}, \bar{v} > = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$일 때, $d(\bar{u}, \bar{v})$를 구하시오

(3) 내적공간의 단위원과 단위구

내적공간 V에서 $||\bar{u}|| = 1$을 만족하는 점들의 집합을 V의 단위원 또는 단위구라고 합니다

$ex)$ 유클리드 내적(표준내적)과 유클리드 가중내적의 단위원은 어떠한 도형이 되는지 확인하시오

(4) 행렬에 의해 생성되는 내적

$< \bar{u}, \bar{v} >$는 $A\bar{u}$와 $A\bar{v}$의 유클리드 내적(표준내적)으로 표현될 수 있습니다

즉 $< \bar{u}, \bar{v} > = A\bar{u} \cdot A\bar{v} = (A\bar{v})^T(A\bar{u}) = \bar{v}^T A^T A\bar{u}$ 가 되며, 이를 행렬 A에 의해 생성되는 R^n상의 내적이라고 합니다

$ex)$ 유클리드 내적(표준내적)과 유클리드 가중내적은 행렬에 의해 생성되는 내적의 특수한 경우라 할 수 있습니다. 이 경우 위의 두 내적을 나타내기 위한 행렬 A를 구하시오

(5) 여러가지 다른 내적들

① M_{mn}의 표준내적

두 행렬 U, V의 표준내적은 $U^T V$의 대각요소의 합과 같습니다. $< U, V >= tr(U^T V)$

$ex)\ U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ 일 때, $< U, V >, ||U||, ||V||$를 구하시오

② P_n 표준내적

$p = a_0 + a_1 x + \cdots\cdots + a_n x^n$, $q = b_0 + b_1 x + \cdots\cdots + b_n x^n$ 일 때

$< p, q > = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots\cdots + a_n b_n$을 P_n 의 표준내적 이라고 합니다

③ P_n 평가내적

$p = a_0 + a_1 x + \cdots\cdots + a_n x^n$, $q = b_0 + b_1 x + \cdots\cdots + b_n x^n$ 일 때

표본점 $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$에 대하여

$p(x_0)q(x_0) + p(x_1)q(x_1) + \cdots\cdots + p(x_n)q(x_n)$을 P_n 의 평가내적 이라고 합니다

$ex)\ P_2$의 표본점 $-2,\ 0,\ 2$에 대하여 $p = x^2$, $q = 1 + x$일 때 $< p, q >$, $||p||$, $||q||$를 구하시오

Chapter 6. 내적공간

④ $C[a,b]$ 상의 내적

2개의 연속함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $a \leq x \leq b$의 내적은 $< f \,, g > = \int_a^b f(x)g(x)dx$ 입니다

$ex)$ $C[0\ 2\pi]$, $f = cosx,\ g = sinx$일 때 $< f, g >$를 구하시오