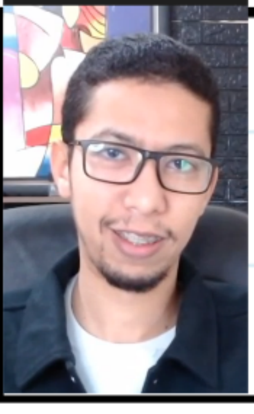

ZAKARIA
Bouicha
WtSp:0617074062

Les limites et la continuité

2Bac Sm (Série 2)

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\operatorname{Arctan}\left(\sqrt[3]{\tan x}\right) & \text{si } x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\\ f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}} & \text{si } x<0 \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2} & \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$

3) Soit g la restriction de la fonction f sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J à déterminer.

b) Dresser le tableau de variations de g^{-1}.

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

Exercice 2 :

I)

1) Montrer que :

$$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\; ; \; \frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

2) a)- Montrer que pour tout $a\in[0,+\infty[$:

$$\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{a}\right)$$

b)- En déduire que : $\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=2+\sqrt{3}$

II) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0^+}\left(1-\sqrt[3]{x^{-2}}\right)\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{Arctan}\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)-\frac{\pi}{4}}{x} \; ; \; \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{2-x}-\sqrt[6]{2-x}}{\sqrt[3]{2-x}-\sqrt{2-x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right)\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x^2+2x}+x+1\right)$$

III) Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty,\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{1-x}+x-1 & \text{si } x<0 \\ f(x)=\operatorname{Arctan}\left(\sqrt[3]{x}+\tan x\right) & \text{si } x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

1) Montrer que la fonction f est continue en 0.

2) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x} \; ; \; \lim_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x} \; ; \; \lim_{x\to-\infty} f(x) \; ; \; \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$$

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

a) Montrer que g est strictement croissante sur I

b) Montrer que g est une bijection de I sur I.

On note g^{-1} la fonction réciproque de g.

c) Résoudre dans I l'équation : $g^{-1}(x)=x$

d) Montrer que : $(\forall x\in I)\; g^{-1}(x)\leq x$

Exercice 3 :

I) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^-$:

$$f(x)=5-\left(\frac{1}{1+\sqrt{-x}}-1\right)^3$$

1) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^-$.

2) Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

3) En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^-$ sur un intervalle J à déterminer.

4) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

II) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I=\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x)=\sqrt[4]{1+\dfrac{15}{\tan^3 x}}-2$

Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer puis calculer $g^{-1}(x)$ pour $x\in J$