ZAKARIA
Bouicha
wtsp: 0617074062

La logique
1 Bac Sm (Série 2)

Ex 1 :

Écrire les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs et connecteurs logiques puis déterminer la négation de chacune d'elles :

P_1 : « Le carré d'un réel quelconque est supérieur ou égal à -1 ».

P_2 : « L'équation $x^2-2x-3=0$ admet au moins une racine réelle ».

P_3 : « Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré ».

P_4 : « Aucun entier naturel n'est supérieur à tous les autres ».

P_5 : « Étant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe »

P_6 : « Tout réel inférieur ou égal à -1 est négatif »

Ex 2 :

Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

1) $(\forall x\in\mathbb{R})\ \left(x^2-|x|+1\geq 0 \text{ et } -1\leq x\leq 1\right)$.

2) $(\exists x\in\mathbb{R});\left(x\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\in\mathbb{Q}\right)$.

3) $\left(\exists(a;b;c)\in\mathbb{R}^3\right);\ a+b+c\leq 9 \text{ et } a\leq b\leq c$

4) $(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0);\ \left|x-\dfrac{\pi}{2}\right|\leq\alpha\Rightarrow|\cos x|\leq\varepsilon$.

Ex 3 :

Soit x et y deux nombres réels.

1) Montrer que : $|x|<1\Rightarrow|2x^2-x-1|<2$.

2) Montrer que : $3\leq x\leq 6\Rightarrow -\dfrac{7}{2}\leq\dfrac{2-3x}{x-1}\leq-\dfrac{16}{5}$

3) Montrer que : $\dfrac{x}{1+|x|}=\dfrac{y}{1+|y|}\Rightarrow xy=0$

4) Montrer que :
$$\begin{cases}1\leq x\leq 3\\1\leq y\leq 3\end{cases}\Rightarrow -10\leq xy-4x+2y-3\leq 2$$

5) Montrer que :
$$\left(|x|<\frac{1}{2}\text{ et }|y-2|\leq\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\frac{3}{2}<\frac{2y}{y-x}<3$$

Ex 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=x^2+x|x-1|-1$$

1) a) Justifier que la fonction f n'est pas paire.

b) Justifier que la fonction f n'est pas monotone.

2) Montrer que :
$$(\exists k\in\mathbb{R});(\forall x\in\mathbb{R})\ \left(|x-1|<1\Rightarrow|f(x)-f(1)|\leq k|x-1|\right)$$

3) En déduire que :
$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0);(\forall x\in\mathbb{R})\ \left(|x-1|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(1)|<\varepsilon\right)$$

Ex 5 :

1) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$1+5+9+\dots+(4n+1)=(n+1)(2n+1)$$

2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$:
$$\left(1\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{n}\right)=\frac{n-1}{n}$$

3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
$$1^4+2^4+\dots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

4) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
$$\frac{1\times3\times5\times\dots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\dots\times(2n)}\leq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

Ex 6 :

1) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
$3^{3n+2}+2^{n+4}$ est divisible par 25

2) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}$ est divisible par 23

3) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
25 divise $2^{n+2}\times3^n+5n-4$

4) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
19 divise $3^{3n+2}+5\times2^{3n+1}$

5) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
17 divise $2^{6n+3}+3^{4n+2}$

Ex7 :

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{4n+3}{6} \notin \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \sqrt{4n+2018} \notin \mathbb{N}$$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\dfrac{8n+2021}{10} \notin \mathbb{Z}$

Ex8 :

Soit n un entier supérieur ou égal à 24.
Montrer par récurrence que :

$$(\exists (p;q) \in \mathbb{Z}^2) \; ; \; n = 5p + 7q$$

Ex9 :

1) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 3$:

$$3^n \geq n^3$$

2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $3^n + n.3^{n-1} \leq 4^n$; b) $5^n \leq 4^n + n.5^{n-1}$

3) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq 1 \times 2 \times \ldots \times n$$

Ex10 :

Montrer par l'absurde que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \sqrt{\dfrac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$

Ex11 :

Soit a et b deux entiers naturels tels que : $a > b > 0$.

Montrer par l'absurde que : $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \notin \mathbb{N}$.