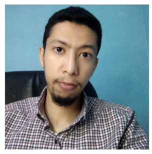
série 2BSM	Pr Zakaria Bouicha	2-BAC SM
les intégrales	Page facebook	
	Chaine Youtube	
2BACSM	Whatsapp : 0617074062	
	plateforme	

Exercice 1

1) Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 (x^2-3)^2\,dx \quad ; \quad I_2 = \int_0^4 \left|x^2-2x-3\right| dx$$

$$I_3 = \int_4^9 \left(x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad ; \quad I_4 = \int_{-1}^2 \frac{2x}{\sqrt{x+2}}\,dx$$

$$I_5 = \int_{-2}^0 (x+1)\sqrt{x^2+2x+3} \quad ; \quad I_6 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\tan^3 x}$$

$$I_7 = \int_0^{\ln\sqrt{3}} e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx \quad ; \quad I_8 = \int_0^1 \left(2^x + 3^{2x}\right) dx$$

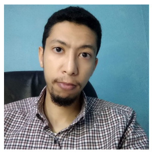
2) En utilisant la formule d'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$J_1 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \quad ; \quad J_2 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}\,dx$$

$$J_3 = \int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) dx \quad ; \quad J_4 = \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$J_5 = \int_1^2 \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx \quad ; \quad J_6 = \int_0^{\ln 3} \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}\,dx$$

$$J_7 = \int_1^e \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx \quad ; \quad J_8 = \int_0^{\pi} x\sin\frac{x}{4}\,dx$$

série 2BSM	Pr Zakaria Bouicha	2-BAC SM
les intégrales	Page facebook	
	Chaine Youtube	
2BACSM	Whatsapp : 0617074062	
	plateforme	

$$I_1 = \int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\,dx \quad ; \quad I_2 = \int_1^3 \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$$

$$I_3 = \int_1^2 \frac{1}{1-x^2}\,dx \quad ; \quad I_4 = \int_0^1 e^x(2x^3+3x^2-x+1)\,dx$$

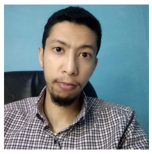
$$I_5 = \int_0^1 \sin^3 x\,dx \quad ; \quad I_6 = \int_0^2 \cos^4 x \cdot \sin^2 x$$

En utilisant l'intégration par parties, calculer :

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x)\,dx \qquad J_2 = \int_0^{\pi/2} x \sin x \cos x\,dx$$

$$J_3 = \int_0^{\pi/3} \frac{x \sin x}{\cos^3 x}\,dx$$

Exercice 2

série 2BSM	Pr Zakaria Bouicha	2-BAC SM
les intégrales 2BACSM	Page facebook	
	Chaine Youtube	
	Whatsapp : 0617074062	
	plateforme	

(Changements de Variables)

1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$

2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

3) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(\sqrt{x})\,dx$

5) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}$ (poser $t=\sqrt{x-1}$)

6) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt[3]{x+1}\,dx$ (poser : $t=\sqrt[3]{x+1}$

7) $\displaystyle\int_0^x \sqrt{1+\sin x}\,dx$ (poser : $t=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}$)

8) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4x^2+9}\,dx$ (poser : $t=\frac{2x}{3}$)

9) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ (poser $x=\cos t$)

10) $\displaystyle\int_0^{-\ln(\sqrt{3})} \frac{dx}{e^x(1+e^{2x})}\,dx$ (poser $x=-\ln(t)$

Exercice 3

1) Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^8 \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x}}\,dx \quad ; \quad I_2 = \int_1^2 \frac{x^5-4x^3+7}{x^2}\,dx$$

$$I_3 = \int_{-3}^3 \left(1+|x+2|+|x-2|\right)^3 dx \quad ; \quad I_4 = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{3-x}}\,dx$$

$$I_5 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin x}{\sqrt{3+\cos x}}\,dx \quad ; \quad I_6 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}}{\left(1+e^{3x}\right)^2}\,dx$$

$$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(3x)\cos(5x)\,dx \quad ; \quad I_8 = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$$

2) En utilisant la formule d'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx \quad ; \quad J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos^2 x\,dx$$

$$J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cos x\,dx \quad ; \quad J_4 = \int_0^1 x^2 e^x\,dx$$

$$J_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(2x)\,dx \quad ; \quad J_6 = \int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$$

$$J_7 = \int_0^{\pi} 2x\sin x\cos^2\frac{x}{2}\,dx \quad ; \quad J_8 = \int_1^e x(\ln x)^2\,dx$$

3) On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\right)dt$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\,dt$$

a) Ecrire l'intégrale I en fonction de J et K.

b) Montrer que : $J = K$

c) Calculer l'intégrale I.

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2x)^n}{(1-x)^n}\,dx$

a) Calculer I_1.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ I_{n+1} = \dfrac{-1}{2^{n+1}(n+2)} + \dfrac{n+1}{n+2} I_n$

Exercice 4

Première partie :

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x}$ et en déduire que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\ln(1+x)}=0$$

2) Pour tout réel x, on pose : $I(x)=e^x\int_0^x \frac{t^2}{2}e^{-t}dt$

a) Sans calculer $I(x)$, montrer que :

- $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ \ 0\le I(x)\le e^x\dfrac{x^3}{6}$
- $(\forall x\in\mathbb{R}^-)\ \ |I(x)|\le \dfrac{|x|^3}{6}$

b) En utilisant deux fois l'intégration par partie,

montrer que : $I(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$

c) En utilisant ce qui précède, montrer que

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ et en déduire que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}$$

3) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x)=e^x\ln(1+x)-x$$

Étudier les variations de la fonction f et en déduire que $f(x)\ge 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$.

(On admet que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ e^x\ge 1+x$)

Deuxième partie :

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ F(x) = \displaystyle\int_{1+x}^{e^x} \frac{dt}{\ln t} \quad , x > 0 \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{e^x - 1 - x}{x} \leq F(x) \leq \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)}$$

2) Montrer que F est continue et dérivable à droite en zéro.

3) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F'(x) = \frac{f(x)}{x \ln(1+x)}$$

4) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction F.

5) Étudier la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_F$ de F au voisinage de $+\infty$.

Exercice 5

Première Partie :

1) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$h(x) = x - \ln x$$

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ h(x) \geq 1$

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1}{x - \ln x} \quad \text{si } x > 0$$

a) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

Deuxième Partie :

Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$$

1) a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que $F'_d(0) = 0$ et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ F'(x) = \frac{\ln 2 - \ln x}{h(2x)\,h(x)}$$

2) a) Vérifier que : $\ln 2 = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t}$

b) Montrer que pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$0 \leq F(x) - \ln 2 \leq \frac{\ln(2x)}{x - \ln x}$$

c) En déduire la limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

3) a) Montrer que : $F\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln 2$

b) Montrer que : $\left(\exists \alpha \in \left[\frac{1}{2};1\right]\right)$; $F(\alpha) = \ln 2$

4) a) Dresser le tableau de variations de F .

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_F$ de F dans un repère ortho-normé (On admet que : $F(1) \approx 0,9$ et $F(2) \approx 1,1$)

5) On considère la fonction G définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$G(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t - \ln t} dt$$

Montrer que : $(\forall x \geq 1)\ G(x) \geq \frac{1}{2}\ln^2(x)$

Puis en déduire $\lim_{x \to +\infty} G(x)$.

Troisième Partie :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{t}{t - \ln t} dt$$

1) a) Montrer que : $(\forall t > 0)\ \frac{t}{t - \ln t} \leq t$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente

et que sa limite ℓ vérifie : $\ell \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$

2) On considère la suite numérique $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$v_n = \int_1^n \frac{t}{t - \ln t}\,dt$$

a) Calculer $\int_1^n \left(1 + \frac{\ln t}{t}\right) dt$ puis montrer que :

$$(\forall n \geq 5) \quad v_n \geq n$$

b) En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 6

Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$$

1 Montrer que la fonction F est impaire.

2 On pose : $\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt \quad ; \quad \forall x > 0$

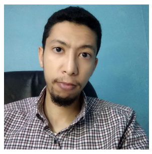
a Vérifier que : $\forall x > 0 \quad ; \quad F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$.

b Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $F'(x) \; ; \; x > 0$

c En déduire le sens des variations de la fonction F sur $]0, +\infty[$.

3 **a** Montrer que : $(\forall x > 0), (\exists c \in]x ; 2x[) \quad ; \quad F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$

b En déduire que : $\forall x > 0 \quad ; \quad \frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$

série 2BSM	Pr Zakaria Bouicha	2-BAC SM
les intégrales 2BACSM	Page facebook	
	Chaine Youtube	
	Whatsapp : 0617074062	
	plateforme	

c Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{F(x)}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0^+} F(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

d Vérifier que : $F\left(\dfrac{\sqrt{e}-1}{2}\right) > \dfrac{\sqrt{e}-1}{2}$; $F\left(\sqrt{e}-1\right) < \sqrt{e}-1$

e En déduire que $F(x) = x$ admet une seule solution dans $]0,+\infty[$

Exercice 7

Soit F la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{4x^2} f(t)\,dt \quad ; \quad \forall\, x > 0 \\ F(0) = 2\ln 2 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C}_F)$ la courbe représentative de la fonction F dans orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1cm$.

1 **a** Vérifier que : $(\forall\, x > 0)$; $\displaystyle\int_{x^2}^{4x^2}\left(\frac{1}{t}\right)dt = 2\ln 2$

b Montrer que : $(\forall\, t > 0)$; $-t < e^{-t} - 1 \leq 0$

2 **a** Montrer que : $(\forall\, x > 0)$; $-3x^2 \leq F(x) - 2\ln 2 \leq 0$.

b En déduire que F est dérivable à droite en zéro.

3 **a** Montrer que : $(\forall\, t \geq 1)$; $f(t) \leq e^{-t}$.

b En déduire la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

4 **a** Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis calculer $F'(x)$

b Dresser le tableau de variations de la fonction F.

c Tracer la courbe $(\mathcal{C}_F)$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exercice 8

On considère la fonction F définie sur $[0;1]$ par :

$$F(0)=1 \quad \text{et} \quad F(x)=\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+2x)}{2x^2} \quad \text{si } x\in]0;1]$$

1) Soit $x\in[0;1]$. Montrer que pour tout $t\in[0;x]$:

$$\frac{1}{1+2x}\leq\frac{1}{1+2t}\leq 1$$

2) Soit $x\in]0;1]$.

a) Montrer que : $F(x)=\dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x\frac{t}{1+2t}\,dt$

b) Montrer que : $\dfrac{1}{1+2x}\leq F(x)\leq 1$

puis en déduire que la fonction F est continue à droite en zéro.

3) En utilisant la formule d'intégration par parties, montrer que pour tout $x\in[0;1]$:

$$\int_0^x\frac{2t}{1+2t}\,dt=\frac{x^2}{1+2x}+2\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$$

4) Soit $x\in]0;1]$:

a) Montrer que : $F'(x)=-\dfrac{4}{x^3}\displaystyle\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

b) En utilisant le résultat de la question 1), montrer que : $-\frac{4}{3} \leq F'(x) \leq -\frac{4}{3(1+2x)^2}$

c) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction F sur $[0;x]$, montrer que :

$$-\frac{4}{3} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

d) En déduire que la fonction F est dérivable à droite en 0 en précisant la valeur de $F'_d(0)$.

Examen National 2012 (Session Normale)

Exercice 9

Première Partie :

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par :

$$f(1)=0 \quad \text{et} \quad f(x)=\frac{1}{1-\ln(1-x)} \quad \text{si} \quad 0 \leq x < 1$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\,cm$

1) Montrer que f est continue à gauche en 1 .
2) Étudier la dérivabilité de f à gauche en 1 .
3) Étudier les variations de la fonction f sur I puis donner son tableau de variations.
4) a) Montrer que $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion dont l'abscisse est $\dfrac{e-1}{e}$.

   b) Construire la courbe $\mathscr{C}$ en indiquant sa demi-tangente au point d'abscisse 0.
5) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha)=\alpha$.
6) a) Montrer que f est une bijection de I vers I .

   b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$.

Deuxième Partie :

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt$

1) Montrer que la suite (I_n) est décroissante puis qu'elle est convergente.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

puis déterminer la limite de la suite (I_n).

Troisième Partie :

Pour tout réel x de l'intervalle $J = [0;1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$F_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad , \quad F_n(x) = \int_0^x t^n f(t)\,dt$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\,dt \quad , \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} F_k(x)$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in J$:

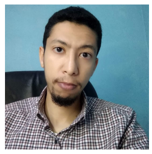
$$F(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t}\,dt$$

2) a) Montrer que la fonction u définie sur J par :

$$u(x) = (1-x)(1-\ln(1-x))$$

est strictement décroissante sur J.

b) En déduire que la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{1-t}$ est strictement croissante sur $[0;x]$ pour tout $x \in J$.

série 2BSM	Pr Zakaria Bouicha	2-BAC SM
les intégrales 2BACSM	Page facebook Chaine Youtube Whatsapp : 0617074062 plateforme	

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in J$:

$$0 \leq F(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

b) En déduire que pour tout $x \in J$:

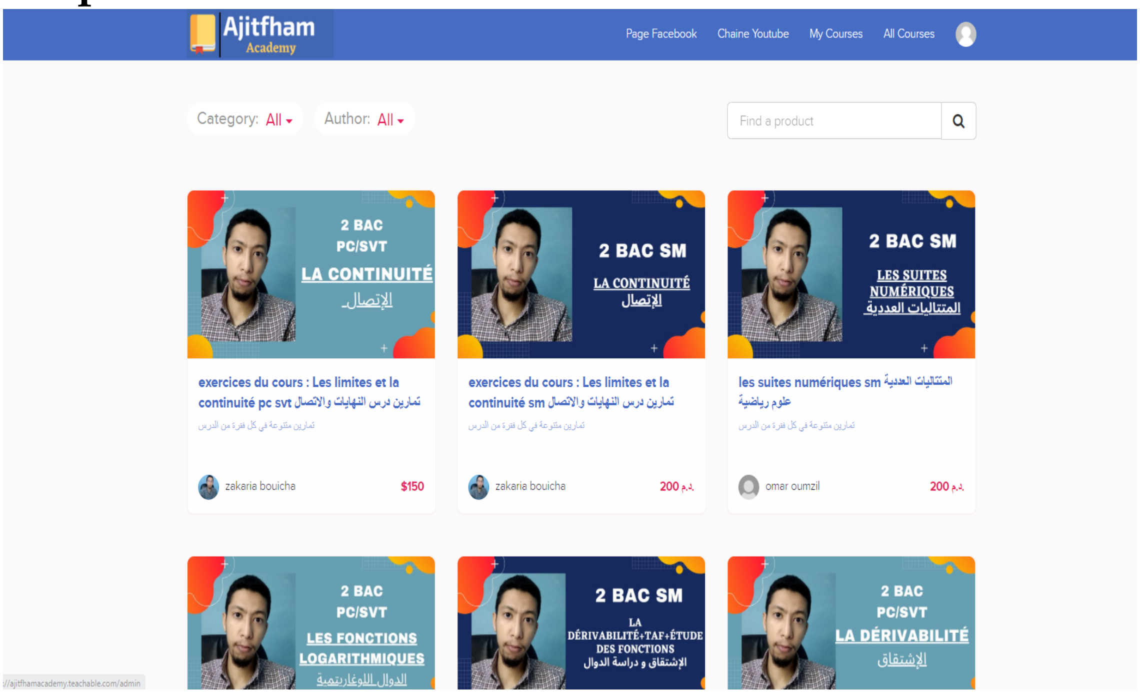
$$\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = F(x)$$

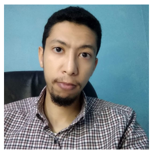
4) a) Déterminer $F(x)$ pour tout $x \in J$.

b) Déterminer la limite : $\lim_{x \to 1^-} F(x)$

Examen National 2010 (Session De Rattrapage)

Pour s'inscrire dans la plateforme et avoir la correction sous forme de videos il suffit de contacter 0617074062 sur wtsp



série 2BSM	Pr Zakaria Bouicha	2-BAC SM
les intégrales 2BACSM	Page facebook	
	Chaine Youtube	
	Whatsapp : 0617074062	
	plateforme