

Chapter 2. 상미분방정식의 급수해

2.1 거듭제곱급수 해법

(1) 상수계수가 아닌 2계 제차방정식의 해

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 에서 2계 상미분방정식의 해 $y(x), p(x), q(x)$ 는 서로 다른 함수의 형태가 될 수 있습니다. 만약 이 함수들을 하나의 함수로 통합할 수 있다면 양변의 계수를 비교하여 해를 구할 수 있습니다.

상수계수가 아닌 2계 제차 방정식의 기본 아이디어는 이 함수들을 다항식 즉, 거듭제곱급수로 변환하는 것입니다.

(2) 거듭제곱급수

거듭제곱급수는 다항식의 합을 의미합니다. 이 거듭제곱을 어느 점을 중심으로 전개하느냐에 따라 달라집니다. $x = x_0$ 에서 거듭제곱을 전개한다면 모든 함수 $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots$ 으로 전개할 수 있으며 여기서 계수 $a_0, a_1, a_2, \dots$ 를 구할 수 있으면 함수 $f(x)$ 를 거듭제곱급수로 나타낼 수 있습니다.

특히, $x_0 = 0$ 인 경우를 많이 사용하게 되는데 이 급수를 Maclaurin 급수라고 합기도 합니다

그러나 이 거듭제곱급수가 의미를 가지기 위해서는 위의 무한급수인 거듭제곱이 함수가 해석적이어야 됩니다

(3) 해석적인 함수

① 미분가능성

함수 $f(x)$ 를 Maclaurin급수로 전개한다고 하면 $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = f(x) = a_0 + a_1(x) + a_2(x)^2 + a_3(x)^3 + \dots$ 으로 나타낼 수 있습니다. 이 때, $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$, $a_2 = \frac{1}{2!}f''(0)$, $\dots$ 으로 구할 수 있으므로 함수 $f(x)$ 는 미분가능해야 됩니다

② 수렴반경

거듭제곱급수는 무한급수형태이므로 이 급수가 수렴할 때만 방정식의 해로서 의미가 있습니다. Maclaurin급수의 경우 x 가 $x_0 = 0$ 부터 어느 범위까지 거듭제곱급수가 수렴하는지 나타내는 정도를 수렴반경이라고 하고 $|x - x_0| < R$ 인 x 의 범위에서 거듭제곱급수가 수렴한다는

Chapter 2. 상미분방정식의 급수해

의미입니다. $x_0 = 0$, $R = 1$ 이라면 $-1 \leq x \leq 1$ 의 범위에서 수렴한다는 의미이고 $x_0 = 0$, $R = \infty$ 라면 $-\infty \leq x \leq \infty$ 즉, 모든 x 에서 수렴한다는 의미입니다.

이 때, $R = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_m|}}$ 또는 $R = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right|}$ 입니다.

(4) 상수계수가 아닌 2계 제차방정식의 해 구하는 방법

- ① $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 에서 $y(x)$ 를 Maclaurin급수로 변경합니다
- ② $p(x), q(x)$ 가 해석적인 함수인지 확인합니다
- ③ ①에서 구한 Maclaurin급수를 원 방정식에 대입하고 x 에 대한 오름차순으로 정리합니다
- ④ $x, x^2, x^3, \dots$ 의 계수가 모두 0이되게 거듭제곱급수의 계수를 구합니다

ex) $y'' - y' + xy = 0$ 의 해를 구하시오