Chapter 1. 벡터해석

1.1 벡터와 연산

(1) 스칼라와 벡터

① 스칼라(Scalar) : 어느 특정한 공간의 한 점에서 단 하나의 실수로 표시되는 양입니다

② 벡터(Vector) : 어느 특정한 공간의 한 점에서 크기와 방향을 모두 갖는 물리량입니다

(2) 기하학적 벡터대수 연산

① 벡터의 덧셈

ⓐ 평행사변형 법칙

$\vec{A}+\vec{B}$ 는 $\vec{A}$의 시점과 $\vec{B}$의 시점을 일치시킨 후 그 시점을 출발점으로 하고 $\vec{A}$와 $\vec{B}$의 크기를 두 이웃변으로 하는 평행사변형의 대각선 방향의 끝을 종점으로 하는 벡터가 됩니다

ⓑ 삼각형 법칙

$\vec{A}+\vec{B}$ 는 $\vec{A}$의 종점과 $\vec{B}$의 시점을 일치시킨 후 $\vec{A}$의 시점을 시작점으로 $\vec{B}$의 종점을 끝점으로 하는 벡터가 됩니다

Chapter 1. 벡터해석

② 벡터의 뺄셈

ⓐ 평행사변형 법칙

$\vec{A}-\vec{B}$는 $\vec{A}$와 $-\vec{B}$의 합으로 나타낼 수 있으며 $\vec{A}+(-\vec{B})$에 평행사변형 법칙을 적용할 수 있습니다. 이 때, $-\vec{B}$는 $\vec{B}$와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터입니다

ⓑ 삼각형 법칙

$\vec{A}-\vec{B}$는 $\vec{A}$와 $-\vec{B}$의 합으로 나타낼 수 있으며 $\vec{A}+(-\vec{B})$에 삼각형 법칙을 적용할 수 있습니다. 이 때, $-\vec{B}$는 $\vec{B}$와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터입니다

③ 벡터의 곱셈

ⓐ 벡터와 스칼라의 곱셈

$a\vec{A}$는 벡터의 크기만 달라집니다. a가 양수이면 같은 방향, 다르면 반대방향이 됩니다

ⓑ 벡터와 벡터의 곱셈

내적 및 외적

④ 벡터의 나눗셈

스칼라의 나눗셈은 $\frac{1}{a}\vec{A}$ 이며 벡터의 나눗셈은 허용되지 않는다

(3) 직각좌표계

어떠한 특정 공간의 점을 표현하기 위한 방법 중 하나로 가장 일반적으로 사용되는 방법이며 x, y, z축을 사용하며 서로 수직입니다. x, y, z축의 방향은 오른나사의 법칙을 따릅니다

① 단위벡터, 위치벡터, 성분벡터

특정 공간의 위치를 표현하기 위하여 크기가 1이고 x, y, z축의 양의 방향을 가지는 벡터를 정의하는데 이를 단위벡터라고 합니다

$\vec{a}_x$: x 방향의 단위벡터입니다

$\vec{a}_y$: y 방향의 단위벡터입니다

$\vec{a}_z$: z 방향의 단위벡터입니다

따라서 특정공간의 위치인 좌표는 원점을 시점으로 하고 그 좌표를 종점으로 하는 벡터로 표현할 수 있는데 이를 위치벡터라고 합니다

$P(x_0, y_0, z_0)$의 위치벡터는 $\vec{r} = x_0\vec{a}_x + y_0\vec{a}_y + z_0\vec{a}_z = [x_0, y_0, z_0]$ 입니다

일반적으로 위치벡터는 $\vec{A} = A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z$ 로 나타낼 수 있는데 A_x, A_y, A_z 를 $\vec{A}$의 성분이라고 하며 A_x를 $\vec{A}$의 x성분, A_y를 $\vec{A}$의 y성분, A_z를 $\vec{A}$의 z성분 이라고 합니다

$ex)$ $P(1, 2, 3)$, $Q(2, -2, 1)$일 때, $\overrightarrow{PQ}$를 구하시오

Chapter 1. 벡터해석

② 미소면적과 미소체적

ⓐ 미소면적

$\pm x$ 방향으로의 미소면적 : $\overrightarrow{ds} = \pm dydz\,\vec{a}_x$

$\pm y$ 방향으로의 미소면적 : $\overrightarrow{ds} = \pm dxdz\,\vec{a}_y$

$\pm z$ 방향으로의 미소면적 : $\overrightarrow{ds} = \pm dxdy\,\vec{a}_z$

ds의 방향은 면적에서 밖으로 나가는 방향입니다

ⓑ 미소체적

$dV = dxdydz$

③ 벡터의 크기와 상동

$\vec{A} = A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z$의 크기는 $|\vec{A}| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}$ 이 되고, 벡터의 크기와 방향이 같을 때 그 벡터는 상동이라고 합니다

④ 벡터의 대수연산

$$[A_x, A_y, A_z] \pm [B_x, B_y, B_z] = [A_x \pm B_x \;\; A_y \pm B_y \;\; A_z \pm B_z]$$

$$a[A_x, A_y, A_z] = [aA_x \;\; aA_y \;\; aA_z]$$

⑤ 일반벡터의 단위벡터

$$\vec{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

Chapter 1. 벡터해석

$ex)$ $A(2,-2,1)$의 위치벡터의 단위벡터를 구하시오

$ex)$ $M(-1,2,1)$, $N(3,-3,0)$, $P(-2,-3,-4)$에서 $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$, $|\vec{r}_M|$, $\vec{a}_{MP}$, $|2\vec{r}_P-3\vec{r}_N|$를 구하시오(단, $\vec{r}_M$은 M의 위치벡터이고 $\vec{a}_{MP}$는 $\overrightarrow{MP}$의 단위벡터이다)