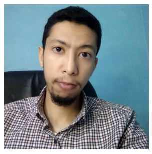
| série 2BSM | Pr Zakaria Bouicha | 2-BAC SM |
|---|---|---|
| la fonction logarithme<br><br>2BACSM | Page facebook |  |
| | Chaine Youtube | |
| | Whatsapp : 0617074062 | |
| | plateforme | |

# Exercice 1

Soit $f$ la fonction définie pour tout $x \in ]-1;+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(1+x)+1-x$

$\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$.

2) Etudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) a) Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in ]-1;+\infty[$

b) Dresser le tableau de variations complet de la fonction $f'$.

c) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in ]-1;+\infty[$ tel que $f'(\alpha)=0$.

d) Vérifier que $0<\alpha<1$ puis préciser le signe de $f'(x)$ sur $]-1;+\infty[$.

e) Dresser le tableau de variations complet de la fonction $f$.

4) a) Montrer que $f$ réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle $J$ à préciser.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction inverse $f^{-1}$.

c) Calculer $(f^{-1})'(\ln 2)$.

d) Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère.

5) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1;+\infty[$, notée $x_n$.

b) Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.

c) Etablir que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

# Exercice 2

Soit $f$ la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{2-\ln^2 x}}$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer $D_f$, le domaine de définition de $f$.
2) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$ puis étudier les variations de la fonction $f$.
3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $e$.
4) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\Delta$ d'équation $y = x$.
5) Construire la courbe $\mathscr{C}$.

# Exercice 3

On considère la fonction numérique $f$ définie par :

$$\begin{cases} f(x)=x^2.\sqrt{-\ln x} & ; \quad 0 < x \le 1 \\ f(x)=(x-1)\ln(x-1) & ; \quad x > 1 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $f$ à droite de 0.
2) Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ en 0.
3) Étudier les variations de la fonction $f$.
4) Étudier la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.
5) Construire la courbe $\mathscr{C}$.

# Exercice 4

1) Montrer que pour tout $x \in [1;+\infty[$ :

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

2) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

   a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n > \ln(1+n)$

   b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

# Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_n(x) = x - n\ln x$

1) a) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)$

   b) Étudier les variations de la fonction $f_n$.

   c) En déduire que pour tout entier $n \geq 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions $u_n$ et $v_n$, et que $0 < u_n < n < v_n$.

2) a) Montrer que : $(\forall n \geq 3)\ 1 < u_n < e$

   b) Montrer que : $(\forall n \geq 3)\ f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$

   c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

   d) En encadrant $\ln u_n$, déterminer la limite de $(u_n)_{n\geq 3}$.

   e) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln u_n}{u_n - 1} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n(u_n - 1) = 1$

3) a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

b) Calculer $f_n(n\ln n)$ puis en déduire que :

$$(\forall n \geq 3)\quad n\ln(n) < v_n$$

c) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\quad x > 2\ln x$

et en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad n > 2\ln n$

d) Déterminer le signe de $f_n(2n\ln(n))$ puis montrer

que : $(\forall n \geq 3)\quad n\ln n < v_n < 2n\ln n$

e) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{n\ln n} = 1$

# Exercice 6

__Première partie :__

On considère la fonction numérique $g$ définie sur $I = [-1;0[\cup]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{(x+1)^2}{x(x+2)} - \ln|x(x+2)|$$

1) Dresser le tableau de variations de la fonction $g$.

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution $\alpha$ dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $I$.

__Deuxième partie :__

On considère la fonction $f$ définie sur $D = \mathbb{R} - \{0;-2\}$

par : $$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln|x(x+2)|}{(x+1)^2} & \text{si } x \neq -1 \\ f(-1) = -1 \end{cases}$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que la droite $(\Delta)$ d'équation $x=-1$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

2) a) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

b) Montrer que $f$ est continue en $-1$.

3) a) Montrer que pour tout $t \in \left]0;\frac{1}{4}\right[$ :

$$-\frac{t^2}{2}-t^3 \leq \ln(1-t)+t \leq -\frac{t^2}{2}$$

b) Montrer que $f$ est dérivable à droite en $-1$.

4) a) Montrer que : $(\forall x \in I-\{-1\})\ f'(x)=\dfrac{2g(x)}{(x+1)^3}$

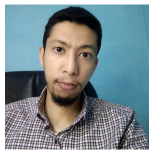
b) Vérifier que : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha(\alpha+1)}$ puis dresser le tableau de variations de $f$ sur $D$.

5) a) Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

(On prend : $\alpha \approx 1,14$ et $f(\alpha)\approx 0,28$)

# Exercice 7

| série 2BSM | Pr Zakaria Bouicha | 2-BAC SM |
|---|---|---|
| la fonction logarithme<br><br>2BACSM | Page facebook |  |
| | Chaine Youtube | |
| | Whatsapp : 0617074062 | |
| | plateforme | |

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\operatorname{Arctan}(\ln(-x))+\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x<0 \\ f(0)=0 & \\ f(x)=(x\ln x-x)^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Étudier la continuité de $f$ en 0.

2) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x}$$

Puis interpréter les résultats graphiquement.

3) Étudier les variations de la fonction $f$.

4) a) Montrer que :

$$\begin{cases} f''(x)=-\dfrac{(1+\ln(-x))^2}{x^2\left(1+\ln^2(-x)\right)^2} & \text{si } x<0 \\ f''(x)=2\left(\ln^2 x+\ln x-1\right) & \text{si } x>0 \end{cases}$$

b) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

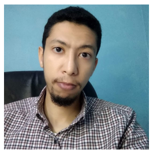
6) Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $\mathbb{R}^-$.

a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $I$ à déterminer.

b) Calculer $(g^{-1})'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in I$.

d) Tracer la courbe de la fonction $g^{-1}$.

| série 2BSM | Pr Zakaria Bouicha | 2-BAC SM |
|---|---|---|
| la fonction logarithme | Page facebook |  |
| | Chaine Youtube | |
| 2BACSM | Whatsapp : 0617074062 | |
| | plateforme | |

# Exercice 8

**Première Partie :**

On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par :

$$g(x)=\ln|x-2|-\frac{x-1}{x-2}$$

1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)\ ,\ \lim_{x\to-\infty} g(x)\ ,\ \lim_{x\to2^+} g(x)\ ,\ \lim_{x\to2^-} g(x)$$

2) Étudier les variations de la fonction $g$ puis dresser son tableau de variations.

3) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $]2;+\infty[$ et que $\alpha\in]4;6[$.

3) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}-\{2\}$.

**Deuxième Partie :**

On considère la fonction $f$ définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-1}{\ln|x-2|} & \text{si } x\neq1 \text{ et } x\neq2 \\ f(1)=-1 \text{ et } f(2)=0 \end{cases}$$

1) Déterminer le domaine de définition de $f$.

2) Étudier la continuité de la fonction $f$ en 1 et en 2.

3) a) Montrer que pour tout $t\in]0;+\infty[$ :

$$t-\frac{t^2}{2}\leq\ln(1+t)\leq t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}$$

b) En déduire que pour tout $x\in]0;1[$ :

$$\frac{1-x}{2}-\frac{(1-x)^2}{3}\leq\frac{x-1+\ln(2-x)}{x-1}\leq\frac{1-x}{2}$$

c) Calculer $\lim_{x\to1^-}\dfrac{1-x}{\ln(2-x)}$ puis en déduire la dérivabilité de $f$ à gauche en 1 et donner $f'_g(1)$.

On admet que $f$ est dérivable à droite en 1.

Donner alors les interprétations géométriques des résultats obtenus.

d) Étudier la dérivabilité de $f$ en 2 puis interpréter les résultats obtenus.

4) Calculer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1;2\}$ .

5) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}$ .

b) Montrer que $f(\alpha) = \alpha - 2$ puis tracer $\mathscr{C}$ .

(On donne : $\alpha \approx 5,6$ et $f(\alpha) \approx 3,6$)

# Exercice 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation sur $\mathbb{R}^*$ :

$$(E_n) : x^n + x - 1 = 0$$

On étudiera $(E_n)$ à l'aide de la fonction auxiliaire $f$ :

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln x}$$

1) *Existence et unicité d'une racine positive x de $(E_n)$* :

a) Résoudre l'équation pour $n = 1$ et $n = 2$ .

b) Etudier les variations de la fonction numérique $x \mapsto x^n + x - 1$ sur $[0;+\infty[$ pour $n \geq 1$.

En déduire que l'équation $(E_n)$ admet une et une seule racine positive qu'on notera $x_n$, et montrer que $0 < x_n < 1$ et en déduire le tableau de variations de $f$ .

2) *Etude de la fonction auxiliaire $f$* :

a) Déterminer le domaine de définition de $f$ et les limites de $f$ aux extrémités de celui-ci.

b) Calculer alors $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de $f$.

3) *Etude de la suite* $(x_n)_{n\geq 1}$ :

a) Montrer que $f(x_n)=n$ pour tout $n\geq 1$.

b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

c) En déduire la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.

d) Préciser la valeur de la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.

## Exercice 10

I) Soit $f$ la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{4\ln x}{x^2}-\frac{1}{2}$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ puis déterminer les deux branches infinies de la courbe $\mathscr{C}$.

2) a) Montrer que pour tout $x\in ]0;+\infty[$ :

$$f'(x)=4\left(\frac{1-2\ln x}{x^3}\right)$$

b) Donner le tableau de variation de la fonction $f$.

3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions différentes $\alpha$ et $\beta$ telles que :

$$1<\alpha<\sqrt{e}<\beta<3$$

4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $1$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

II)

1) Montrer que : $(\forall t \in [0;+\infty[)\ 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$

2) En déduire que pour tout $a \in [0,+\infty[$ :

$$a-\frac{a^2}{2} \leq \ln(1+a) \leq a$$

III) Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 4.

On considère la fonction $f_n$ définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f_n(x)=\frac{n\ln x}{x^2}-\frac{1}{2}$

Et soit $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Étudier les variations de la fonction $f_n$.

2) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_n$ et montrer qu'elle admet un point d'inflexion d'abscisse $e^{\frac{5}{6}}$.

3)a) Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ selon les valeurs de la variable $x$.

b) En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.

4) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet exactement deux solutions différentes $u_n$ et $v_n$ telles que :

$$1<u_n<\sqrt{e}<v_n<3$$

5) En utilisant le résultat de la question 3), montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 4}$ est strictement décroissante.

6)a) En utilisant II) 2), montrer que pour tout $n \geq 4$ :

$$\frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leq \ln(u_n) \leq u_n-1$$

b) En déduire que pour tout $n \geq 4$ :

$$\frac{(u_n)^2}{2n} \leq u_n - 1 \leq \frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}$$

c) Montrer que : $(\forall n \geq 4)\ \frac{1}{2n} \leq u_n - 1 \leq \frac{e}{n}$

d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 4}$ est convergente en déterminant sa limite.

7)a) Montrer que : $(\forall n \geq 4)\ v_n > e^{\frac{5}{6}}$

b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

**Examen National 2003 (Session Normale)**

# Exercice 11

**Première Partie :**

Dans cette partie, on veut étudier les solutions positives de l'équation $(E) : e^x = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère la fonction $f$ définie sur $D = [0;1[ \cup ]1;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Vérifier que pour tout $x \in ]0;1[ \cup ]1;+\infty[$ on a :

$$e^x = x^n \Leftrightarrow n = f(x)$$

2) Montrer que $f$ est dérivable à droite en 0.

3) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \;,\; \lim_{x\to 1^+} f(x) \;,\; \lim_{x\to +\infty} f(x) \;,\; \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

4) Étudier les variations de la fonction $f$ sur chacun des intervalles $[0;1[$ et $]1;+\infty[$ puis donner son tableau de variations.

5) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

6) Construire la courbe $\mathscr{C}$.

7) Montrer que si $n \geq 3$, alors l'équation $(E)$ admet exactement deux solutions $a_n$ et $b_n$ telles que :

$$1 < a_n < e < b_n$$

**Deuxième Partie :**

Dans cette partie, on se propose d'étudier la convergence des suites $(a_n)_{n\geq 3}$ et $(b_n)_{n\geq 3}$.

1) Montrer que pour tout $n \geq 3$ : $b_n \geq n$ puis en déduire la limite de la suite $(b_n)_{n\geq 3}$.

2)a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante puis en déduire qu'elle est convergente.

b) Montrer que pour tout $n \geq 3$ : $\frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$ puis en déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\geq 3}$.

c) Montrer que $\lim_{n\to +\infty} a_n^n = e$.

**Examen National 2011 (Session Normale)**

## Exercice 12

On considère la fonction $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln x$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. (On prend : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$)

1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to 0^+} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x},\ \lim_{x\to+\infty} (f(x)-x)$$

2)a) Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

b) Montrer que la fonction $f$ réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle $J$ à déterminer, puis dresser le tableau de variations de sa fonction réciproque $f^{-1}$.

3) Calculer $f(1)$ et $f(e)$ puis construire la courbe $\mathscr{C}$ et la courbe $\mathscr{C}'$ de $f^{-1}$ dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère l'équation :

$$(E_n) : \ x + \ln x = n$$

a) Montrer que $(E_n)$ admet une unique solution $x_n$.

b) Préciser $x_1$ puis montrer que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

5)a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ f(x_n) \leq f(n)$

Puis en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ x_n \leq n$

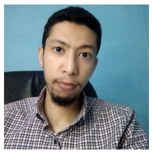
b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ n - \ln(n) \leq x_n$

c) Calculer les deux limites :

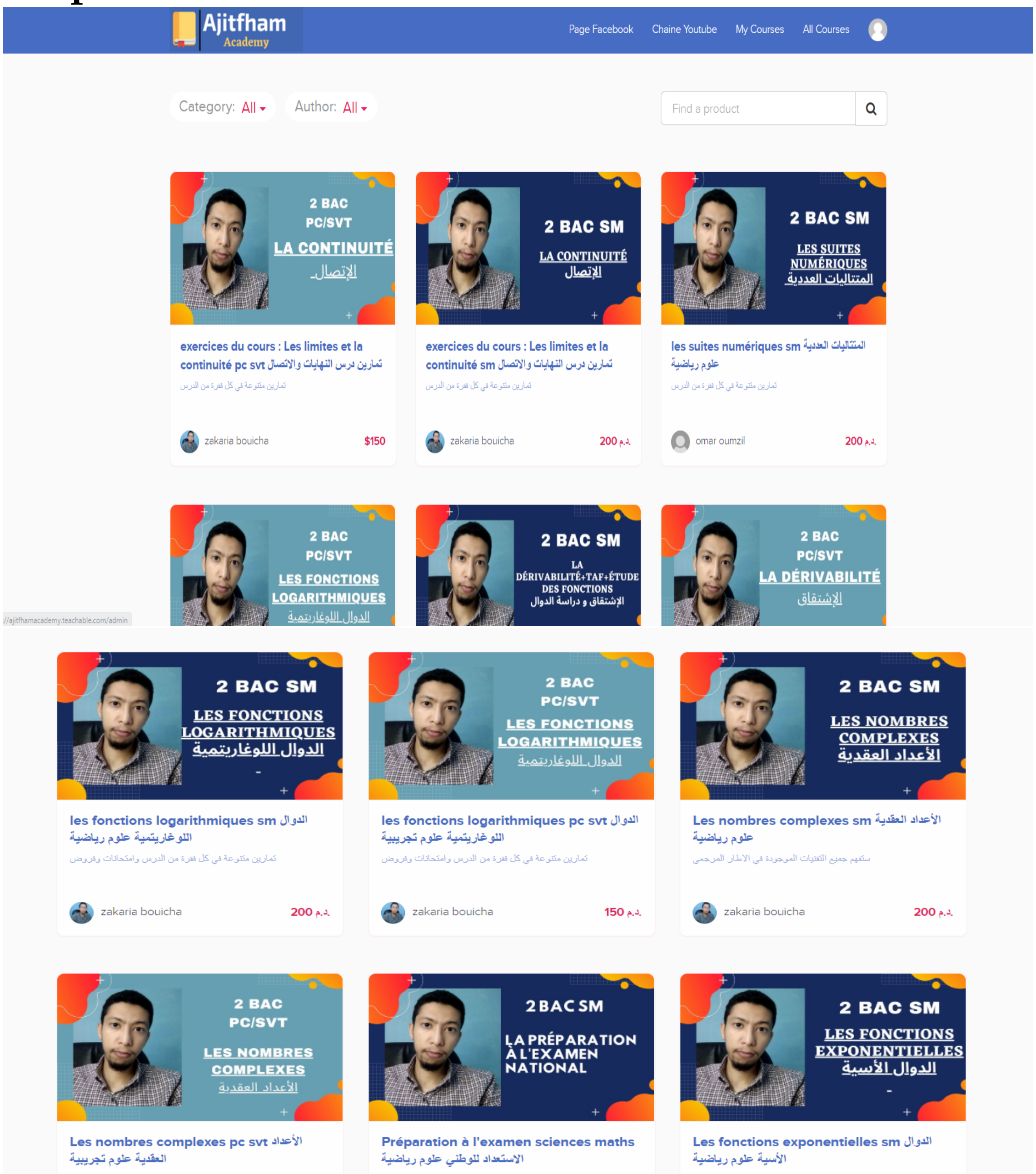
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - n}{n} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n - \ln(n)}$$

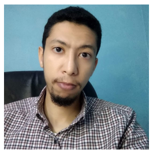
Examen National 2011 (Session De Rattrapage)

**Pour s'inscrire dans la plateforme et avoir la correction**

| série 2BSM | Pr Zakaria Bouicha | 2-BAC SM |
|---|---|---|
| la fonction logarithme<br><br>2BACSM | Page facebook<br>Chaine Youtube<br>Whatsapp : 0617074062<br>plateforme |  |

**sous forme de videos il suffit de contacter 0617074062 sur wtsp**



| série 2BSM | Pr Zakaria Bouicha | 2-BAC SM |
|---|---|---|
| la fonction logarithme<br><br>2BACSM | Page facebook<br>Chaine Youtube<br>Whatsapp : 0617074062<br>plateforme |  |