Ex1

I) On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{-x\ln x}{1+x^2} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1)a) Montrer que la fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ et à droite de 0.

On admet dans la suite que f est continue sur $[0;+\infty[$.

b) Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0;+\infty[$.

2)a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$

b) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

c) Montrer qu'il existe un réel $\alpha\in\,]0;1[$ tel que $f'(\alpha)=0$

d) En déduire que : $f'\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=0$

On considère la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

Et soit $\mathscr{C}_F$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

II)

1) a) Vérifier que : $(\forall t\in[1;+\infty[)\ \dfrac{1}{2}\leq\dfrac{t^2}{1+t^2}\leq 1$

b) En déduire que pour tout $x\geq 1$:

$$F(1)-\frac{1}{2}(\ln x)^2\leq F(x)\leq F(1)-\frac{1}{4}(\ln x)^2$$

(Remarquer que :

$$F(x)=\int_0^1 f(t)\,dt-\int_1^x\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\frac{\ln t}{t}\,dt\text{)}$$

c) Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2)a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puis calculer $F'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$.

b) Étudier les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}_+^*$.

II)

1) a) Vérifier que : $(\forall t\in[1;+\infty[)\ \dfrac{1}{2}\leq\dfrac{t^2}{1+t^2}\leq 1$

b) En déduire que pour tout $x\geq 1$:

$$F(1)-\frac{1}{2}(\ln x)^2\leq F(x)\leq F(1)-\frac{1}{4}(\ln x)^2$$

(Remarquer que :

$$F(x)=\int_0^1 f(t)\,dt-\int_1^x\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\frac{\ln t}{t}\,dt\text{)}$$

c) Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2)a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puis calculer $F'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$.

b) Étudier les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ex2 (Ex 99 Al moufid)

On considère la suite numérique (I_n) définie par :

$$I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$$

1) Calculer I_0 et I_1.

2) En utilisant le changement $t=\sqrt{1-x}$, montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ I_n=2\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\dfrac{(-1)^k}{2k+3}$

3) a) Montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ (2n+5)I_{n+1}=2(n+1)I_n$$

b) En déduire par récurrence que :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ I_n=\frac{2^{2n+2}(n!)^2(n+1)}{(2n+3)!}$$

4) a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x\in[0;1]$: $\dfrac{2}{x^2-2}=a+\dfrac{b}{x-\sqrt{2}}+\dfrac{c}{x+\sqrt{2}}$

b) En déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{x^2-2}\,dx$

5) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$J_n=\int_0^1 x^n\frac{\sqrt{1-x}}{1+x}\,dx \quad\text{et}\quad S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k$$

a) En utilisant le changement $t=\sqrt{1-x}$, calculer J_0.

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 0\le J_n\le\dfrac{1}{n+1}$

et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

c) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ S_n=J_0-(-1)^{n+1}J_{n+1}$

d) En déduire la limite de la suite (S_n).

Ex3

⇨ *Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, On pose : $I_n=\int_1^e x^2.(\ln x)^n\,dx$.*

1)- Calculer l'intégrale I_1.

2)- a)- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $I_{n+1}=\frac{1}{3}e^3-\frac{n+1}{3}I_n$.

b)- En déduire la valeur de I_2 et I_3.

3)- a)- Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

b)- Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $I_n\ge 0$. Puis en déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

4)- Montrer que : $(\forall x\in[1;e])$; $\ln x\le\frac{x}{e}$. Puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

5)- Montrer que : $(\forall n\ge 2)$; $\frac{e^3}{n+4}\le I_n\le\frac{e^3}{n+3}$. Puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n.I_n$.

Ex4

PARTIE 01 :

1)- Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t}dt=\frac{1}{2}+\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

2)- Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $\frac{x}{3(x+1)}\le\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t}dt\le\frac{x}{3}$.

3)- En déduire la valeur de la limite : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

PARTIE 02 :

⇨ *Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :*

$$f(0)=0 \text{ et } f(x)=x^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right); si\ x>0.$$

1)- Montrer que f est continue et dérivable à droite en 0.

2)- a)- Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b)- Montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique (Δ) do[nt] on déterminera une équation cartésienne.

3)- a)- Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$(\forall x\in]0;+\infty[);\ f'(x)=x\left(2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right).$$

b)- Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}>0$. Puis dresser le tableau de variation de f.

4)- Construire la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5)- Pour tout $\lambda\in]0;1[$, On pose : $I(\lambda)=\int_\lambda^1\left(f(x)-x+\frac{1}{2}\right)dx$.

✓ *Exprimer $I(\lambda)$ en fonction de λ, puis calculer : $\lim\limits_{\lambda\to0^+} I(\lambda)$ et donner une interprétation géométrique de cette limite.*

6)- On pose : $S_n=\frac{1}{n}.\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ Où $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

a)- Montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\});\ \frac{1}{n}.f\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt\le S_n\le\frac{1}{n}.f(1)+\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt.$$

b)- En déduire que la suite $(S_n)_{n\ge2}$ est convergente en précisant sa limite.

Ex5

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans chacun des cas suivants :

1) $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2.\sqrt[3]{n^3+k^3}}$; 2) $u_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{n+k}{n^2+k^2}$

3) $u_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{(n^2+k^2)^3}}$; 4) $u_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{k}{\sqrt{n+k}}$

Ex6

1 Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\left(\frac{1}{x}\right)} & ;\quad \forall x>0\\ g(0)=0 \end{cases}$$

0,25 **a** Montrer que la fonction g est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

0,25 **b** Montrer que la fonction g est continue à droite en zéro.

0,25 **c** Montrer que la fonction g est n'est pas continue en zéro.

2 On pose : $L(x)=\int_0^x g(t)\,dt$; $x\in]0,+\infty[$

0,25 **a** Calculer $L(x)$; $\forall x\in]0,+\infty[$.

0,25 **b** Montrer que la fonction L est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

0,25 **c** Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to0^+}L(x)$

3 On considère la suite $(S_n)_{n\ge1}$ définie pour chaque n de $\mathbb{N}^*$ par :

$$S_n=n\left(\left(\frac{1}{1}\right)^2e^{-n}+\left(\frac{1}{2}\right)^2e^{-\left(\frac{n}{2}\right)}+\left(\frac{1}{3}\right)^2e^{-\left(\frac{n}{3}\right)}+\dots+\left(\frac{1}{n-1}\right)^2e^{-\left(\frac{n}{n-1}\right)}\right)$$

0,25 **a** Montrer que : $\forall n\ge1$; $S_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}g\left(\frac{k}{n}\right)$

0,25 **b** En déduire que la suite $(S_n)_{n\ge1}$ converge puis donner sa limite.

Ex7

2 On pose : $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$; $\forall n \in \mathbb{N}$

0,50 a Montrer pour chaque couple $(n,k) \in \mathbb{N}^2$; $n \geq 2$; $1 \leq k \leq n-1$ que :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0,50 b Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt \leq u_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt$

0,25 c En déduire que : $\lim_{n\infty}(u_n) = 4$

Ex8

On considère la fonction F définie sur $[0;1]$ par :

$$F(0)=1 \quad \text{et} \quad F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2} \quad \text{si } x \in]0;1]$$

1) Soit $x \in [0;1]$. Montrer que pour tout $t \in [0;x]$:

$$\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$$

2) Soit $x \in]0;1]$.

a) Montrer que : $F(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}\,dt$

b) Montrer que : $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$

puis en déduire que la fonction F est continue à droite en zéro.

3) En utilisant la formule d'intégration par parties, montrer que pour tout $x \in [0;1]$:

$$\int_0^x \frac{2t}{1+2t}\,dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$$

4) Soit $x \in]0;1]$:

a) Montrer que : $F'(x) = -\frac{4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

b) En utilisant le résultat de la question 1), montrer que : $-\frac{4}{3} \leq F'(x) \leq -\frac{4}{3(1+2x)^2}$

c) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction F sur $[0;x]$, montrer que :

$$-\frac{4}{3} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

d) En déduire que la fonction F est dérivable à droite en 0 en précisant la valeur de $F'_d(0)$.

Examen National 2012 (Session Normale)