Fonctions exponentielles

CAPACITÉS ATTENDUES

- Maitriser la résolution des équations et des inéquations et des systèmes comportant l'exponentielle népérienne.
- Maitriser et appliquer les limites fondamentales de la fonction exponentielle népérienne.
- Maitriser l'étude et la représentation des fonctions comportant la fonction exponentielle.
- Maitriser l'étude et la représentation de fonctions comportant la fonction logarithme et la fonction exponentielle népérienne.

$x \to \ln x$ est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Alors elle admet une fonction réciproque appellé la fonction exponentielle népérienne.

1 FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

1.1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES

Définition 1

La fonction réciproque de la fonction logarithme népérienne est appelée la **fonction exponentielle** népérienne (ou la fonction exponentielle), et on la note exp.

Remarques

- La fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$: $(\forall \beta \in \mathbb{R})(\exists! \alpha \in \mathbb{R}_+^*) \; \beta = \ln(\alpha)$
- Par définition de la fonction exp : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}_+^*) \; (y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y))$
  $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$
- $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$ car : $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$

Proposition 1

- La fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. $(D_{exp} = \mathbb{R})$
- La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) > 0$ et $\ln(\exp(x)) = x$
- On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\exp(\ln x) = x$

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$
$$x \mapsto \exp(x)$$

Corollaire

- Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $\left(\exp(x)=\exp(y)\Leftrightarrow x=y\right)$ et $\left(\exp(x)<\exp(y)\Leftrightarrow x<y\right)$
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\left(\exp(x)=1\Leftrightarrow x=0\right)$ et $\left(\exp(x)<1\Leftrightarrow x<0\right)$ et $\left(\exp(x)>1\Leftrightarrow x>0\right)$

preuve :

- $\exp(x)=1 \Leftrightarrow x=\ln(1) \Leftrightarrow x=0$
- $\exp(x)<1 \Leftrightarrow x<\ln(1) \Leftrightarrow x<0$
- $\exp(x)>1 \Leftrightarrow x>\ln(1) \Leftrightarrow x>0$

Exemples

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right)=\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$ (E_1)

$D=\{x\in\mathbb{R} \,/\, 2x+3\neq 0 \text{ et } x-1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2};1\}$

$=\left]-\infty,-\frac{3}{2}\right[\cup\left]-\frac{3}{2};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[.$

$(E_1)\Leftrightarrow \frac{x+5}{2x+3}=\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x+5)(x-1)=2x+3$

$\Leftrightarrow x^2-x+5x-5=2x+3$

$\Leftrightarrow x^2+2x-8=0$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1-9=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2=9$

$\Leftrightarrow x+1=3$ ou $x+1=-3$

$\Leftrightarrow x=2\in D$ ou $x=-4\in D$

$S_{E_1}=\{-4;2\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\exp(2x+1)\leq\exp\left(\frac{6}{x}\right)$

$D=\mathbb{R}^*$

$\exp(2x+1)\leq\exp\left(\frac{6}{x}\right) \Leftrightarrow 2x+1\leq\frac{6}{x}$

$\Leftrightarrow 2x+1-\frac{6}{x}\leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{2x^2+x-6}{x}\leq 0$

étudions le signe de $2x^2+x-6$

$\Delta = 1 + 48 = 49 > 0$

$x = \frac{-1-7}{4}$ ou $\frac{-1+7}{4}$

$x = -2$ ou $\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		-2		0		$3/2$		$+\infty$
$2x^2+x-6$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x^2+x-6}{x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $S =]-\infty, -2] \cup]0; 3/2]$

Applications

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$\exp(-x^2) = \exp\left(\frac{3x+1}{x-5}\right)$; $\exp\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = e^2$; $\exp(-x^2) > \exp(-x)$

$\exp(5x^2 - 7x + 2) \leq 1$; $\exp\left(\frac{1}{x+7}\right) \leq \exp\left(\frac{1}{(x+7)^2} - 12\right)$

* $\exp(-x^2) = \exp\left(\frac{3x+1}{x-5}\right)$

$D_f =]-\infty, 5[\cup]5, +\infty[$

On a $\exp(-x^2) = \exp\left(\frac{3x+1}{x-5}\right)$

$\Leftrightarrow -x^2 = \frac{3x+1}{x-5}$

$\Leftrightarrow -x^3 + 5x^2 - 3x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(-x^2+4x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $-x^2 + 4x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \frac{-4-\sqrt{20}}{-2}$ ou $x = \frac{-4+\sqrt{20}}{-2}$

$(\Delta = 16 + 4 = 20)$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 2+\sqrt{5}$ ou $x = 2-\sqrt{5}$

Donc $S = \{1, 2+\sqrt{5}, 2-\sqrt{5}\}$.

* $\exp\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = e^2$

On a $D_E = \mathbb{R}^*$.

On a $\exp\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = e^2$

$\iff x^2 + \frac{1}{x^2} = \ln(e^2)$

$\iff x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$

$\iff x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 0$

$\iff \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2} = 0$

$\iff x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

$\iff (x^2 - 1)^2 = 0$

$\iff x^2 - 1 = 0$

$\iff x^2 = 1$

$\iff x = 1$ ou $x = -1$

Donc $S_E = \{1, -1\}$

1.2. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

Proposition 2

Pour tous réels x et y on a : $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

preuve : On pose $a = \exp(x) > 0$ et $b = \exp(y) > 0$

$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b) = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y))$

$= x + y$

Alors $\ln(a \times b) = x + y$

$\iff a \times b = \exp(x+y)$

$\iff \exp(x) \times \exp(y) = \exp(x+y)$

Proposition 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous réels $x_1, x_2, \dots, x_n$, on a :

$$\exp(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \exp(x_1).\exp(x_2)\dots\exp(x_n) \text{, c'est-à-dire : } \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp(x_k)$$

De la proposition 2, on déduit les résultats suivants :

Proposition 4

Soit x et y deux nombres réels, et r un nombre rationnel. Alors :

1) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$; 2) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$; 3) $\exp(rx) = (\exp(x))^r$

preuve :

1) $\exp(-x) \times \exp(x) = \exp(-x+x) = \exp(0) = 1.$

$$\Rightarrow \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

2) $\exp(x-y) = \exp(x+(-y)) = \exp(x) \times \exp(-y)$

$$= \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

3) On pose $a = \exp(rx)$, on a : $\ln(a) = rx \Leftrightarrow \frac{1}{r}\ln(a) = x$

$\Leftrightarrow \ln(a^{1/r}) = x$

$\Leftrightarrow a^{1/r} = \exp(x)$

$\Leftrightarrow a = (\exp(x))^r$

$\Leftrightarrow \exp(rx) = (\exp(x))^r$

1.3. UNE AUTRE ÉCRITURE DE LA FONCTION exp

On a $\exp(1) = e$. On a déjà vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $\exp(rx) = (\exp(x))^r$

En particulier pour $x = 1$: $\exp(r) = (\exp(1))^r = e^r$

On prolongera cette écriture en notant pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) = e^x$

Remarquons enfin que cette nouvelle notation est compatible avec les notations des puissances connues.

Avec cette nouvelle notation, on résumera les résultats vus précédemment comme suit :

- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)$ $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$
- $(\forall x \in \mathbb{R})$ $e^x > 0$
- $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\ln(e^x) = x$ et $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ $e^{\ln x} = x$
- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $(e^x = e^y \Leftrightarrow x = y)$ et $(e^x < e^y \Leftrightarrow x < y)$
- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $r \in \mathbb{Q}$:

$$e^{x+y} = e^x \times e^y \quad ; \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad ; \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad ; \quad e^{rx} = (e^x)^r$$

Exemples

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{x^2}.(e^x)^3=(e^{-x})^2.e^{-7}$ $\quad D=\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow e^{x^2}.e^{3x}=e^{-2x}.e^{-7}$

$\Leftrightarrow e^{x^2+3x}=e^{-2x-7}$

$\Leftrightarrow x^2+3x=-2x-7$

$\Leftrightarrow x^2+5x+7=0$

$\Delta<0$ alors $S=\emptyset$ $\quad (\Delta=25-28=-3<0)$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x-3}-(e+1)e^{x-2}+1<0$ $\quad (I)$

$D=\mathbb{R}$,

$(I)\Leftrightarrow e^{2x-4}.e^{1}-(e+1)e^{x-2}+1<0$

$\Leftrightarrow e(e^{x-2})^2-(e+1)e^{x-2}+1<0$

$\Leftrightarrow et^2-(e+1)t+1<0$ $\quad (t=e^{x-2})$

$(\Delta=(e+1)^2-4e=e^2-2e+1=(e-1)^2>0)$

on a : $et^2-(e+1)t+1=0$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{e+1-e+1}{2e}$ ou $t=\dfrac{e+1+e-1}{2e}$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{e}$ ou $t=1$

$\Leftrightarrow e^{x-2}=e^{-1}$ ou $e^{x-2}=1$

$\Leftrightarrow x-2=-1$ ou $x-2=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=2$

t	$-\infty$		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$et^2-(e+1)t+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$et^2-(e+1)t+1<0 \iff \frac{1}{e}<t<1$$

$$\iff \frac{1}{e}<e^{x-2}<1$$

$$\iff -1<x-2<0$$

$$\iff 1<x<2$$

$$S_I=\left]1;2\right[$$

Applications

1) On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$. Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)+f(-x)=2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{\frac{3x}{x-1}}-e^{\frac{x}{x-1}}=2e^{\frac{x}{x-1}}-2$ (indication $t=e^{\frac{x}{x-1}}$)

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{(e^{2x}-16)(e^{x}-1)}{e^{x+1}-e}\geq 0$

1)

$$f(x)=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$$

$$f(-x)=\frac{2e^{-2x}}{e^{-2x}+1}=\frac{\frac{2}{e^{2x}}}{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}}=\frac{2}{e^{2x}+1}$$

$$f(x)+f(-x)=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}+\frac{2}{e^{2x}+1}=\frac{2\cancel{(e^{2x}+1)}}{\cancel{(e^{2x}+1)}}$$

$$=2$$

2) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$e^{\frac{x}{x-1}}\left(\left(e^{\frac{x}{x-1}}\right)^2-1\right) = 2\left(e^{\frac{x}{x-1}}-1\right)$$

$e^{\frac{x}{x-1}}\left(e^{\frac{x}{x-1}}+1\right) = 2$ ou $e^{\frac{x}{x-1}}-1=0$

$e^{\frac{2x}{x-1}}+e^{\frac{x}{x-1}}-2=0$ ou $\frac{x}{x-1}=0$

$\cancel{\left(e^{\frac{2x}{x-1}}+2e^{\frac{x}{x-1}}+1\right)-\left(e^{\frac{x}{x-1}}+1\right)=0}$

$t = e^{\frac{x}{x-1}}$

$t^2+t-2=0$

$t = \frac{-1-3}{2} = -2 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{x-1}} = -2$ Absurde

$t = \frac{-1+3}{2} = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{x-1}} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{x}{x-1} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

$S = \{0\}$

3) **3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :** $\frac{\left(e^{2x}-16\right)\left(e^x-1\right)}{e^{x+1}-e} \geq 0$ (I)

$\boxed{e^x = e^y \Leftrightarrow x = y}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, e^{x+1}-e \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x+1 \neq 1\}$
$= \mathbb{R}^*$

(I) $\Leftrightarrow \frac{\left((e^x)^2-4^2\right)\left(e^x-1\right)}{e\left(e^x-1\right)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{\left(e^x-4\right)\left(e^x+4\right)\cancel{\left(e^x-1\right)}}{e\cancel{\left(e^x-1\right)}} \geq 0$

$\Leftrightarrow (e^x-4) \geq 0$ $\quad$ $(e^x+4 > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^*)$

$\Leftrightarrow e^x \geq 4$

$\Leftrightarrow x \geq \ln(4) = 2\ln(2)$

$S_I = [2\ln(2) ; +\infty[$.

1.4. DÉRIVÉE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

Proposition 5

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \exp'(x) = \exp(x)$

Ce qui s'écrit aussi : $(\forall x \in \mathbb{R})\ (e^x)' = e^x$

preuve :

posons $f(x) = \ln x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f^{-1}(x) = e^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$, car : $\begin{cases} \bullet\ f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \\ \bullet\ f'(x) = \frac{1}{x} \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$

et
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = \boxed{e^x}$$

En utilisant la composée de deux fonctions dérivables, on montre la proposition suivante :

Proposition 6

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$$(\forall x \in I)\ \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$$

(car : $(f \circ g(x))' = g'(x) \times f'(g(x)) \Rightarrow (e^{U(x)})' = U'(x)\, e^{U(x)}$)

Exemples

Déterminons les dérivées des fonctions f, g et h définies par :

$$f(x) = e^{\sqrt{2x+1}} \quad ; \quad g(x) = e^{-2x^2} - 3e^{3x+1} \quad ; \quad h(x) = e^{\frac{x+1}{-x+3}}$$

• La fonction $x \mapsto \sqrt{2x+1}$ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. Donc la fonction f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et on a pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$: $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}}$

• Les fonctions polynomiales $x \mapsto -2x^2$ et $x \mapsto 3x+1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et leurs dérivées sont $x \mapsto -4x$ et $x \mapsto 3$ respectivement. Donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = -4xe^{-2x^2} - 9e^{3x+1}$$

• La fonction rationnelle $x \mapsto \frac{x+1}{-x+3}$ est dérivable sur chacun des intervalles $]3;+\infty[$ et $]-\infty;3[$, et sa dérivée est $x \mapsto \frac{4}{(x-3)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}-\{3\}$. Donc la fonction h est dérivable sur chacun des intervalles $]3;+\infty[$ et $]-\infty;3[$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}-\{3\}$: $h'(x) = \frac{4}{(x-3)^2}e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Les primitives de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)} + \lambda$ où λ est une constante réelle.

Exemples

Déterminons les primitives des fonctions f, g et h définies par :

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \quad ; \quad g(x) = \frac{e^{\mathrm{Arc}\tan x}}{1+x^2} \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}e^{\sqrt[3]{x}}$$

• f est continue sur $]0;+\infty[$ alors elle admet une fonction primitive définie sur $]0;+\infty[$, et puisque $f(x) = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{\sqrt{x}}$
$= 2(\sqrt{x})'e^{\sqrt{x}}$

donc ses primitives sont : $F(x) = 2e^{\sqrt{x}} + \alpha$ où $(\alpha \in \mathbb{R})$

• g est continue sur $\mathbb{R}$, alors primitive $G(x)$ existe et

$G(x) = e^{\mathrm{Arctan} x} + \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ (car $f(x) = (\mathrm{Arctan}(x))'e^{\mathrm{Arctan}(x)}$)

• h est continue sur $]0;+\infty[$ et $h(x) = 3(\sqrt[3]{x})'e^{\sqrt[3]{x}}$

Donc : $H(x) = 3e^{\sqrt[3]{x}} + \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Applications

1) Déterminer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$f(x)=e^{\sqrt{2x^2-x+5}} \quad ; \quad g(x)=e^{\frac{2}{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} \quad ; \quad h(x)=xe^{\frac{2x}{x^2-1}} \quad ; \quad k(x)=\frac{\sin(x)}{e^{\cos(2x)}}$$

2) Déterminer les primitives des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$u(x)=\left(4-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)e^{2x-\sqrt{x}} \quad ; \quad v(x)=-\frac{\ln^2 x}{x}e^{(\ln x)^3} \quad ; \quad w(x)=\frac{e^{\frac{\sin x}{1+\cos x}}}{1+\cos x}$$

Correction

1) • $f'(x)=\left(\sqrt{2x^2-x+5}\right)' e^{\sqrt{2x^2-x+5}}$

$$= \frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+5}} \times e^{\sqrt{2x^2-x+5}}$$

• $g'(x)=\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' e^{\frac{2}{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}$

$$= \left(\frac{-2}{x^2}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}\right) e^{\frac{2}{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}$$

$$\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

• $h'(x)=\left(x e^{\frac{2x}{x^2-1}}\right)' = e^{\frac{2x}{x^2-1}} + x\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)' e^{\frac{2x}{x^2-1}}$

$$= e^{\frac{2x}{x^2-1}}\left(1+x\left(\frac{2(x^2-1)-2x(2x)}{(x^2-1)^2}\right)\right)$$

$$= e^{\frac{2x}{x^2-1}}\left[1+\left(\frac{-2x^3-2x}{(x^2-1)^2}\right)\right]$$

$$= e^{\frac{2x}{x^2-1}}\left[\frac{(x^2-1)^2-2x(x^2-1)}{(x^2-1)^2}\right]$$

$$= e^{\frac{2x}{x^2-1}}\left(\frac{x^2-1-2x}{x^2-1}\right)$$

$$= e^{\frac{2x}{x^2-1}}\left(\frac{x^2-2x-1}{x^2-1}\right)$$

• $k'(x)=\left(\frac{\sin(x)}{e^{\cos(2x)}}\right)' = \frac{\cos x\, e^{\cos(2x)} - \sin x(-2\sin x)\, e^{\cos(2x)}}{e^{2\cos(2x)}}$

$$= \frac{e^{\cos(2x)}\left(\cos x + 2(1-\cos^2 x)\right)}{e^{2\cos(2x)}}$$

$$= \frac{e^{\cos(2x)}\left(\cos x + 2\left(1-\cos^2 x\right)\right)}{e^{2\cos(2x)}}$$

$$= \frac{-2\cos^2 x + \cos x + 2}{e^{\cos(2x)}}$$

2) • $u(x)=\left(4-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)e^{2x-\sqrt{x}} = 2\left(2-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{2x-\sqrt{x}}$

$= 2\left(2x-\sqrt{x}\right)' e^{2x-\sqrt{x}}$

Alors les primitives sont $x \longmapsto 2e^{2x-\sqrt{x}} + \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

• $v(x) = -\frac{\ln^2 x}{x} e^{(\ln x)^3} = -\frac{1}{3} \times 3 \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^2 e^{(\ln x)^3}$

$= -\frac{1}{3}\left((\ln x)^3\right)' e^{(\ln x)^3}$

Alors les primitives de v sont : $x \longmapsto -\frac{1}{3} e^{(\ln x)^3} + \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

• $w(x) = \frac{e^{\frac{\sin x}{1+\cos x}}}{1+\cos x} = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)' e^{\frac{\sin x}{1+\cos x}}$

$\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)'$

$= \frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$

Les primitives sont $x \mapsto e^{\frac{\sin x}{1+\cos x}} + \alpha$ où $(\alpha \in \mathbb{R})$

$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$

$= \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}$

$= \frac{1}{1+\cos x}$

1.5. LIMITES FONDAMENTALES

Proposition 7

- On a les limites fondamentales suivantes :

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$; $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

- Si a est un réel non nul alors : $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{x} = a$ et $\lim_{x\to a} \frac{e^x-e^a}{x-a} = e^a$

preuve

$\ln :]0;+\infty[\to]-\infty,+\infty[$

$\exp :]-\infty,+\infty[\to]0;+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

On pose : $x = \ln(t)$; on a ; $x \to +\infty \Leftrightarrow t \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = \lim_{t\to+\infty} e^{\ln(t)} = \lim_{t\to+\infty} t = +\infty$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}$ (car $t = -x$)

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t} = 0$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

On pose $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln(t)$ et $x \to +\infty \Leftrightarrow t \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{\ln(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\frac{\ln(t)}{t}} = +\infty$$

(car : $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0^+$; $\forall t>1$ $\ln(t)>0$)

- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

On pose $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln(t)$ et $x \to -\infty \Leftrightarrow t \to 0^+$

Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{t\to 0^+} \ln(t)\, t = 0^-$

- $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \exp'(0) = \exp(0) = 1 \quad (\exp'(x) = \exp(x))$$

- $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$. On pose $f(x) = e^{ax} \Rightarrow f'(x) = (ax)'e^{ax} = ae^{ax}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = ae^0 = a$$

- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{e^x - e^a}{x - a} = e^a$

$$\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \exp'(a) = e^a$$

Proposition 8

Pour tout entier naturel n, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$

- preuve :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n^n} \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{n^n} \left(\frac{e^t}{t}\right)^n$$

$$= +\infty$$

$$\left(\text{car: } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty\right)$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

on pose $t = -x \Leftrightarrow x = -t$ et $x \to -\infty \Leftrightarrow t \to +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = \lim_{t \to +\infty} (-t)^n e^{-t} = \lim_{t \to +\infty} (-1)^n \frac{t^n}{e^t}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} (-1)^n \frac{1}{\frac{e^t}{t^n}}$$

$$= 0$$

Remarque :

Si n est pair, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0^+$

Si n est impair, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0^-$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^n}} = 0$$

Exemples

1) Calculons les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+3x+4}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3-x^2+5x)e^x$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+3x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}$$

$$= +\infty$$

(car : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} 3/x = \lim\limits_{+\infty} \frac{4}{x^2} = 0$)

- $$\lim_{x\to-\infty} (x^3-x^2+5x)e^x = \lim_{x\to-\infty} x^3 e^x \left(1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)$$

$-\infty$ $=0$

$$= 0 \times 1$$

$$= 0$$

(car : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{-\infty} \frac{5}{x} = 0$)

2) Calculons la limite $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5 e^{-x^2}$:

$t = x^2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{t}$

$$\lim_{x\to-\infty} x^5 e^{-x^2} = \lim_{t\to+\infty} (-\sqrt{t})^5 e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} -\frac{\sqrt{t}^5}{e^t} = 0$$

3) Calculons les limites suivantes : $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}$ et $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sqrt[3]{x}}-1}{x}$

- $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{\sin(0)}}{x-0}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (car $f(x)=e^{\sin x}$) $\Rightarrow f'(x)=\cos x\, e^{\sin x}$

$= f'(0)$

$= \cos(0)\, e^{\sin(0)}$

$= 1$

- $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sqrt[3]{x}}-1}{x} = \lim_{t\to 0^+}\frac{e^t-1}{t^3}$ ($t=\sqrt[3]{x} \Rightarrow x=t^3$)

$= \lim_{t\to 0^+}\frac{e^t-1}{t}\times\frac{1}{t^2}$

$= +\infty$

(car : $\lim_{t\to 0^+}\frac{e^t-1}{t}=1$ et $\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}=+\infty$)

Applications

1) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$; $\lim_{x\to+\infty} e^x - x^4\ln x$; $\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x+1\right)-x\right)$

2) Étudier la dérivabilité de la fonction $f : x\mapsto\sqrt{1-e^{-2x}}$ à droite au point 0.

3) Montrer que la droite Δ d'équation $y=x+1$ est une asymptote oblique de la courbe de la fonction g définie par : $g(x)=(x-1)e^{\frac{2}{x}}$

4) Calculer la limite suivante : $\lim_{\substack{x\to\pi\\ x>\pi}}\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)^4 e^{\frac{1}{\pi-x}}$

Solution :

1)
- $\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) = \lim_{t\to 0^+}\frac{e^t-1}{t} = 1$ $\left(t=\frac{1}{x}\right)$

- $\lim_{x\to+\infty} e^x - x^4\ln x = \lim_{x\to+\infty} x^5\left(\frac{e^x}{x^5}-\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

(car $\lim_{+\infty}\frac{e^x}{x^5}=+\infty$ et $\lim_{+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x+1\right)-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln(e^x+1) - \ln(e^x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)$$

$$= \lim_{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right) = \ln(1) = 0$$

2)
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-e^{-2x}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{1-e^{-2x}}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{e^{-2x}-1}{-2x} \times \frac{2}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{e^{-2x}-1}{-2x}} \times \sqrt{\frac{2}{x}}$$

$$= +\infty$$

$$\left(\text{car: } \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-2x}-1}{-2x} = \lim_{t\to 0^-} \frac{e^t-1}{t} = 1 \text{ et } \lim_{0^+} \sqrt{\frac{2}{x}} = +\infty\right)$$

Alors f n'est pas dérivable en 0^+.

3)
$$g(x) - (x+1) = (x-1)e^{\frac{2}{x}} - (x+1)$$

$$= x e^{\frac{2}{x}} - e^{\frac{2}{x}} - x - 1$$

$$= x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right) - e^{\frac{2}{x}} - 1$$

$$= 2 \times \frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{2}{x}} - e^{2/x} - 1$$

En posant $t = \frac{2}{x}$, $x \to +\infty \Leftrightarrow t \to 0^+$ et $x \to -\infty \Leftrightarrow t \to 0^-$

donc
$$\lim_{x\to\pm\infty} 2 \times \frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{2}{x}} - e^{2/x} - 1$$

$$= \lim_{t\to 0} 2\frac{e^t-1}{t} - e^t - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$$

Donc $(\Delta) : y = x+1$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to\pi \\ x>\pi}} \left(\frac{1}{1+\cos x}\right)^4 e^{\frac{1}{\pi-x}} = \lim\limits_{t\to 0^-} \left(\frac{1}{1+\cos(\pi-t)}\right)^4 e^{\frac{1}{t}}$

$(t = \pi - x)$

$= \lim\limits_{t\to 0^-} \left(\frac{t^2}{1-\cos(t)}\right)^4 \times \frac{e^{1/t}}{t^8}$

$\boxed{\lim\limits_{-\infty} x^n e^x = 0}$

$= \lim\limits_{t\to 0^-} \left(\frac{t^2}{1-\cos t}\right)^4 \times \left(\frac{1}{t}\right)^8 e^{\frac{1}{t}}$

$\left(\text{car: } \lim\limits_{t\to 0^-} \left(\frac{1}{t}\right)^8 e^{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{X\to-\infty} X^8 e^X = 0\right)$

$= 2^4 \times 0 = 0$

2 FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a

2.1. DÉFINITION DE LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a

Définition 2

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction exponentielle de base a est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$. On la note $\exp_a$.

Remarques

- D'après la définition 2, on a : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)\ (y = \exp_a(x) \Leftrightarrow x = \log_a(y))$
- Soit x un réel positif et y un réel strictement positif. On a alors :

$$y = \exp_a(x) \Leftrightarrow x = \log_a(y) = \frac{\ln y}{\ln a} \Leftrightarrow \ln y = x\ln a \Leftrightarrow y = e^{x\ln a}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp_a(x) = e^{x\ln a}$

2.2. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Proposition 9

Soit x et y deux réels et r un nombre rationnel $(r \in \mathbb{Q})$. Alors :

$$\exp_a(x+y) = \exp_a(x).\exp_a(y) \quad ; \quad \exp_a(x-y) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)} \quad ; \quad \exp_a(rx) = (\exp_a(x))^r$$

2.3. UNE AUTRE ÉCRITURE DE LA FONCTION $\exp_a$

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On a : $\exp_a(1) = e^{\ln(a)} = a$

Et puisque pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $\exp_a(r) = (\exp_a(1))^r = a^r$

On prolonge cette écriture sur l'ensemble des nombres réels en écrivant pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp_a(x) = a^x$

Proposition 10

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. Alors :

- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)\quad y = a^x \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln y}{\ln a}$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\quad \log_a(a^x) = x \qquad$ et $\qquad (\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\quad a^{\log_a(x)} = x$
- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\quad a^{x+y} = a^x \times a^y \quad$ et $\quad a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

Preuve :

$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a(y) = \dfrac{\ln(y)}{\ln(a)}$

Remarque

Dans ce paragraphe, on a supposé que $a > 0$ et $a \neq 1$, et après avoir prolongé l'écriture $\exp_a$ sous la forme d'une puissance de a, on a obtenu : $(\forall x \in \mathbb{R})\ a^x = e^{x \ln a}$

Le fait que $e^0 = 1$ nous conduit à poser « par convention » : $1^x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

On a donc : $\quad (\forall a \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in \mathbb{R})\ \ a^x = e^{x \ln a}$

Proposition 11

Soit a et b deux réels strictement positifs. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$a^{x+y} = a^x \times a^y \ ; \ a^{-x} = \frac{1}{a^x} \ ; \ a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \ ; \ (a^x)^y = a^{xy} \ ; \ (ab)^x = a^x.b^x \ ; \ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Exemples

$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln(a)}$

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $5^x = 15$

Cette équation s'écrit $e^{x \ln 5} = 15$, ce qui est équivaut à $x \ln 5 = \ln 15$, c'est-à-dire à $x = \dfrac{\ln 15}{\ln 5}$.

Par suite, l'ensemble des solutions de cette équation est : $S = \left\{\dfrac{\ln 15}{\ln 5}\right\}$

2) Soit a un réel de l'intervalle $]1; +\infty[$, et soit x et y deux réels strictement positifs.

Simplifions les expressions suivantes : $\alpha = a^{\frac{\ln(\log a)}{\ln(a)}}$ et $\beta = \log_a\left(\log_a a^{a^a}\right)$ et $\lambda = \dfrac{x^{\log_a(y)}}{y^{\log_a(x)}}$

Pour α : $\alpha = a^{\frac{\ln(\log a)}{\ln(a)}} = a^{\log_a(\log a)} = \log a$

$\boxed{\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}}$

Pour β : $\beta = \log_a\left(\log_a a^{\boxed{a^a}}\right) = \log_a(a^a) = a \log_a(a) = a$

x

$\left(\log_a(a^x) = x\right)$

Pour λ : $\lambda = \dfrac{x^{\log_a(y)}}{y^{\log_a(x)}} = \dfrac{e^{\log_a(y)\ln(x)}}{e^{\log_a(x)\ln(y)}} = e^{\log_a(y)\ln x - \log_a(x)\ln(y)}$

$= e^{\frac{\ln(y)}{\ln(a)}\ln x - \frac{\ln x}{\ln(a)} \times \ln(y)} = e^0 = \boxed{1}$

$a^x = e^{x\ln(a)}$

2.4. ÉTUDE DE LA FONCTION $\exp_a$

Proposition 12

La fonction $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(\exp_a)'(x) = (a^x)' = (\ln a).a^x$

preuve :

$$(a^x)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = \left(x\ln(a)\right)' e^{x\ln(a)}$$
$$= \ln(a)\, e^{x\ln(a)}$$
$$= \ln(a) \times a^x$$

Proposition 13

$a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

- Si $a > 1$ alors la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) \quad x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$$

- Si $0 < a < 1$ alors la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$:

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) \quad x < y \Leftrightarrow a^x > a^y$$

Proposition 14

- Si $a > 1$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.
- Si $0 < a < 1$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

Application

On considère la fonction numérique définie par : $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f.
2) Calculer les limites de la fonction f aux bornes du domaine de définition.
3) Étudier les variations de la fonction f.
4) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse 0.
5) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé.

$(a^x)' = \ln(a)\, a^x$

$(a^x)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)'$
$= \ln(a)\, e^{x\ln(a)}$
$= \ln(a)\, a^x$

Solution

1) $D_f = \mathbb{R}$.

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4^x \left(1 - \left(\frac{2}{4}\right)^x . 2\right)$

$$= \lim_{x \to +\infty} 4^x \left(1 - \left(\frac{2}{4}\right)^x . 2\right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} 4^x \left(1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$$
$$= +\infty$$
$$\left(\text{car : } \lim_{x \to +\infty} 4^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0 \right)$$

$$\boxed{(a^x)' = \ln(a)\, a^x}$$

3) Étudier les variations de la fonction f.

$\forall x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = \ln(4) \times 4^x - 2 . \ln(2)\, 2^x = 2\ln(2)\, 4^x - 2\ln(2)\, 2^x$
$$= 2\ln(2)\left(2^{2x} - 2^x\right)$$
$$= 2\ln(2)\, 2^x \left(2^x - 1\right)$$

le signe de $f'(x)$ est celui de $2^x - 1$

$2^x - 1 = 0 \iff 2^x = 1 \iff x = \log_2(1) \iff x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

4) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse 0.

(T) : $y = f'(0)\,(x - 0) + f(0)$

(T) $y = -1$

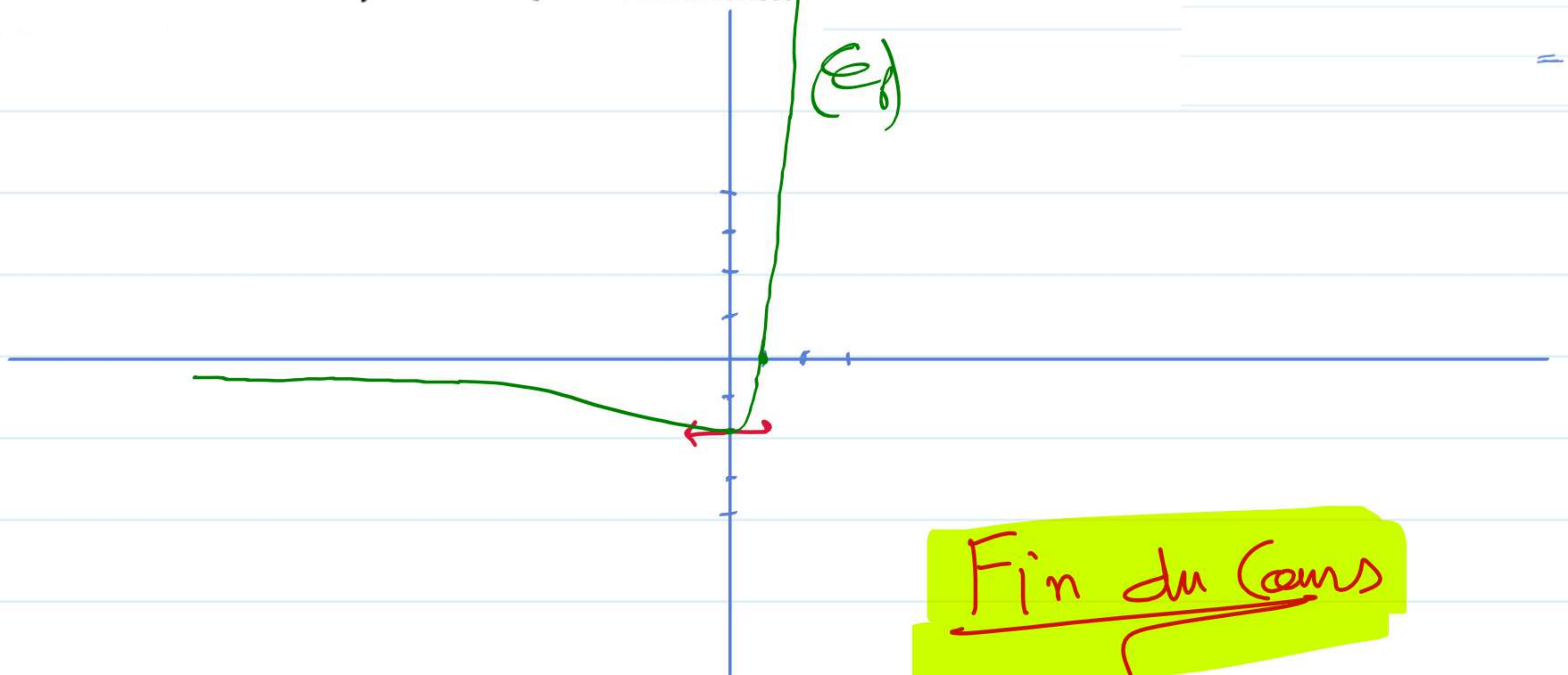
On a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4^x\left(1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)}{x}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4^x}{x} \left(1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$

$= +\infty$

5) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé.



Fin du Cours