

NATIONAL 2024 SESSION NORMALE

2 BAC SM

06 17 07 40 62

Prof zakaria bouicha



**Pour accéder au contenu
gratuit de la préparation des
concours Médecine ENSA
ENSAM cliquez ici**

**Pour consulter le contenu de
préparation national
(Rattrapage) contactez nous sur
whatsapp** 

Correction national 2024 N



EXERCICE 1 : (7.5 points)

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par :

$$f(1) = \frac{1}{2} \text{ et pour tout } x \in]1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0.5 1- Montrer que f est continue à droite en 1

0.5 2- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x^2 - 1} \times \frac{1}{x + 1} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f(1)$$

Alors f est continue en 1

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \times 0 = 0$$

$$(\text{car: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0)$$

Alors: $y = 0$ est une asymptote horizontale de (C) au voisinage de $+\infty$,

0.25 3- a) Soit $x \in]1, +\infty[$

$$\text{En posant : } t = (x - 1)^2, \text{ vérifier que : } \frac{1 - x + \ln(x)}{(x - 1)^2} = \frac{-\sqrt{t} + \ln(1 + \sqrt{t})}{t}$$

$$\text{Soit } x > 1, \text{ on pose } t = (x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{t} \quad (\text{car } x - 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{t}$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln(1 + \sqrt{t})$$

$$\text{d'où} \quad \frac{1 - x + \ln x}{(x - 1)^2} = \frac{-\sqrt{t} + \ln(1 + \sqrt{t})}{(x - 1)^2}$$

0.5 b) Montrer que $(\forall t \in]0, +\infty[), -\frac{1}{2} < \frac{-\sqrt{t} + \ln(1 + \sqrt{t})}{t} < \frac{-1}{2(1 + \sqrt{t})}$

(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0; t]$)

Soit $t > 0$

$\mathcal{E} : x \mapsto -\sqrt{x} + \ln(1 + \sqrt{x})$ est continue sur $[0, t]$, dérivable sur $]0, t[$

(car: $x \mapsto 1 + \sqrt{x}$ est dérivable et strictement positive sur $]0, t[$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, t]$ et dérivable sur $]0, t[$)

d'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists c \in]0, t[\quad \mathcal{E}'(c) = \frac{\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(0)}{t - 0}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2\sqrt{t}} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{1+\sqrt{t}} = \frac{-\sqrt{t} + \ln(1+\sqrt{t})}{t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{t}} \left(\frac{1}{1+\sqrt{t}} - 1 \right) = \frac{-\sqrt{t} + \ln(1+\sqrt{t})}{t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{t}} \times \frac{-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} = \frac{-\sqrt{t} + \ln(1+\sqrt{t})}{t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$$

On a: $0 < t < 4 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &0 < \sqrt{t} < 2 \\ &\Rightarrow 1 < 1+\sqrt{t} < 3 \\ &\Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{1+\sqrt{t}} < 1 \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})} < \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{-\sqrt{t} + \ln(1+\sqrt{t})}{t} < \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})} \quad \forall t \in]0, 4[$$

0.25

c) En déduire que: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2}$

d'après 3)b On a: $-\frac{1}{2} < \frac{-\sqrt{t} + \ln(1+\sqrt{t})}{t} < \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$

On a: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\sqrt{t} + \ln(1+\sqrt{t})}{t}$ en posant $t=(x-1)^2$

puisque $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})} = -\frac{1}{2} = \lim_{t \rightarrow 1^+} -\frac{1}{2}$

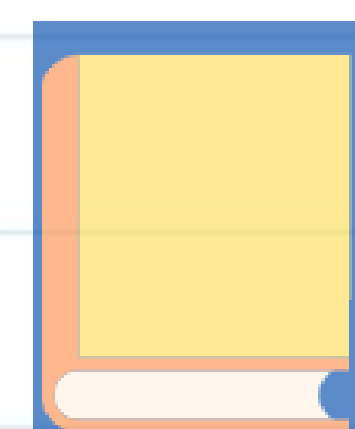
d'après le Théorème des gendarmes: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2}$

0.5

4- a) Montrer que: $\forall x \in]1, +\infty[$, $\frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1} = -\frac{\ln(x)}{x-1} \times \frac{1}{2(x+1)} + \frac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2}$

$$\frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1} = \frac{\frac{\ln(x)}{x^2-1} - \frac{1}{2}}{x-1} = \frac{\frac{2\ln(x)-x^2+1}{2(x-1)(x+1)}}{(x-1)}$$

$$= \frac{2\ln(x)-x^2+1}{2(x-1)^2(x+1)}$$



$$\begin{aligned}
 \text{et on a ; } & -\frac{\ln(x)}{x-1} \times \frac{1}{2(x+1)} + \frac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2} = \frac{-\ln x (x-1)}{2(x-1)^2(x+1)} + \frac{(\ln x - x + 1)(x+1)}{2(x-1)^2(x+1)} \\
 & = \frac{-x \ln x + \ln x + x \ln x + \ln x - x^2 - x + x + 1}{2(x-1)^2(x+1)} \\
 & = \frac{2 \ln x - x^2 + 1}{2(x-1)^2(x+1)}
 \end{aligned}$$

donc $\forall x \in]1, +\infty[$, $\frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x-1} = -\frac{\ln(x)}{x-1} \times \frac{1}{2(x+1)} + \frac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2}$

0.5

b) En déduire que f est dérivable à droite en 1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

$$\begin{aligned}
 \text{On a } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\ln x}{x-1} \times \frac{1}{2(x+1)} + \frac{\ln x - x + 1}{2(x-1)^2} \\
 &= -1 \times \frac{1}{4} + \frac{-\frac{1}{2} \times 2}{2 \times 2} \\
 &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2 \times 2} \\
 &= -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Ainsi f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = -\frac{1}{2}$

I.G.: (C) admet une demi-tangente au point $(1, \frac{1}{2})$ à droite d'équation

$$y = f'_d(1)(x-1) + f(1)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$



0.5

5- Pour tout $x \in [1, +\infty[$ on pose $I(x) = \int_1^x \frac{t^2-1}{t^3} dt$ et $J(x) = \int_1^x \frac{t^2-1}{t^2} dt$

a) Montrer que : $\forall x \in [1, +\infty[, 0 \leq I(x) \leq J(x)$

Soit $x > 1$, on a : $\frac{t^2-1}{t^3} \geq 0 \Rightarrow \int_1^x \frac{t^2-1}{t^3} dt \geq 0$

$$\begin{aligned}
 \text{et } I(x) - J(x) &= \int_1^x \left[\frac{t^2-1}{t^3} - \left(\frac{t^2-1}{t^2} \right) \right] dt = \int_1^x \frac{t^2-1 - (t^3-t)}{t^3} dt \\
 &= \int_1^x \frac{t^2-1-t(t^2-1)}{t^3} dt
 \end{aligned}$$

$$= \int_1^x \frac{(t^2-1)(1-t)}{t^3} dt$$

Or on $1-t \leq 0$ et $\frac{(t^2-1)}{t^3} \geq 0 \Rightarrow \frac{(t^2-1)(1-t)}{t^3} \leq 0$

$$\Rightarrow \int_1^x \frac{(t^2-1)(1-t)}{t^3} dt \leq 0$$

$$\Rightarrow I(x) \leq J(x)$$

$$\text{Donc } \forall x \in [1, +\infty[\quad 0 \leq I(x) \leq J(x)$$

0.5

b) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $I(x) = \ln(x) - \frac{x^2-1}{2x^2}$ et $J(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_1^x \frac{1}{t} dt - \int_1^x \frac{1}{t^3} dt = \left[\ln(t) \right]_1^x - \int_1^x t^{-3} dt \\ &= \ln(x) - 0 - \int_1^x -(t)' t^{-3} dt \\ &= \ln(x) - \left[\frac{1}{-2} t^{-2} \right]_1^x \\ &= \ln(x) - \left(-\frac{1}{2} x^{-2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \ln(x) - \left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \ln(x) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x^2} + 1 \right) \\ &= \ln(x) - \left(\frac{x^2-1}{2x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(x) &= \int_1^x 1 dt - \int_1^x \frac{1}{t^2} dt \\ &= x - 1 - \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x \\ &= x - 1 - \left(-\frac{1}{x} + 1 \right) \\ &= x - 1 + \frac{1}{x} - 1 \\ &= \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \end{aligned}$$



0.5

c) Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[, f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{I(x)}{J(x)}$

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x^2 - 1} \right)' = \frac{\frac{1}{x} (x^2 - 1) - \ln x (2x)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{x - \frac{1}{x} - 2x \ln x}{(x-1)^2 (x+1)^2}$$

$$= \frac{-2x \left(x \ln x + \frac{1}{2x} - \frac{x}{2} \right)}{(x+1)^2 (x-1)^2}$$

$$\text{On a : } \frac{I(x)}{J(x)} = \frac{\ln x - \frac{x^2 - 1}{2x^2}}{(x-1)^2} = \frac{\ln x - \frac{x^2 - 1}{2x^2}}{(x-1)^2} \times \frac{x}{x} = \frac{2x^2 \ln x - x^2 + 1}{2x^2 (x-1)^2}$$

$$= \frac{x \ln x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}}{(x-1)^2}$$

Alors

$$f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{I(x)}{J(x)}$$

0.5

d) En déduire que : $\forall x \in]1, +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$

$$\text{On a : } \forall x \in]1, +\infty[\quad 0 < I(x) \leq J(x)$$

$$\rightarrow \frac{I(x)}{J(x)} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{I(x)}{J(x)} > 0$$

$$\text{Et : On a : } x > 1 \rightarrow x+1 > 2 \rightarrow (x+1)^2 > 4 \rightarrow \frac{1}{(x+1)^2} < \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \frac{2}{(x+1)^2} < \frac{1}{2}$$

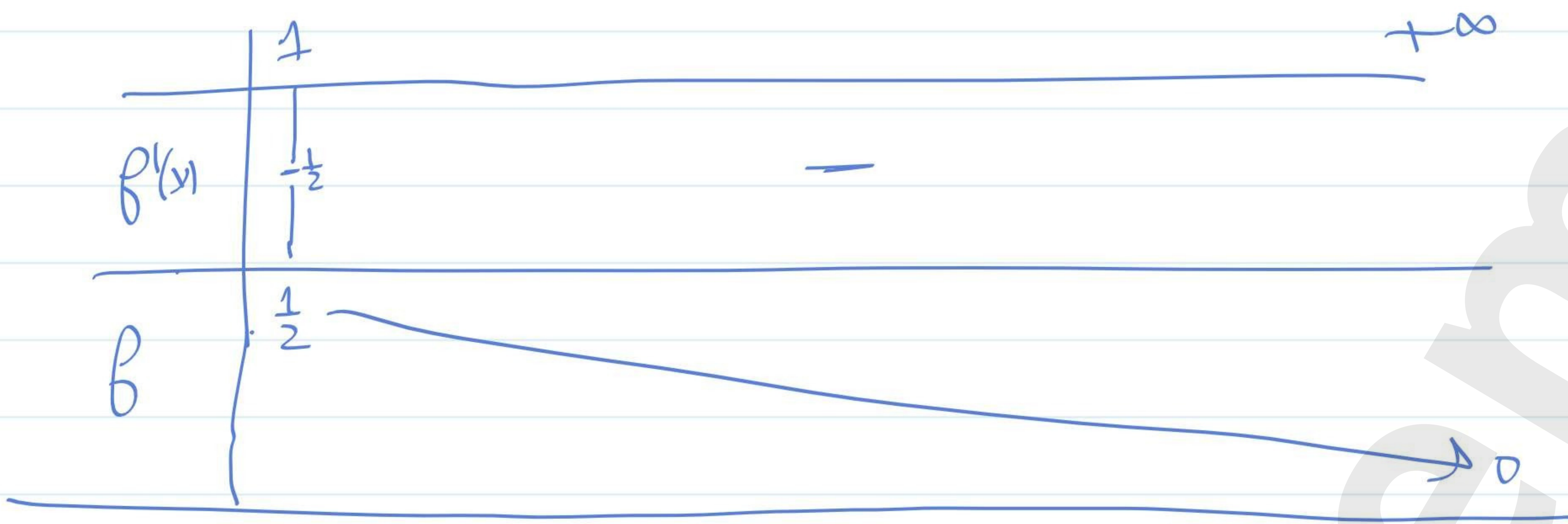
$$\rightarrow \frac{2}{(x+1)^2} \frac{I(x)}{J(x)} \leq \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow f'(x) \geq -\frac{1}{2}$$

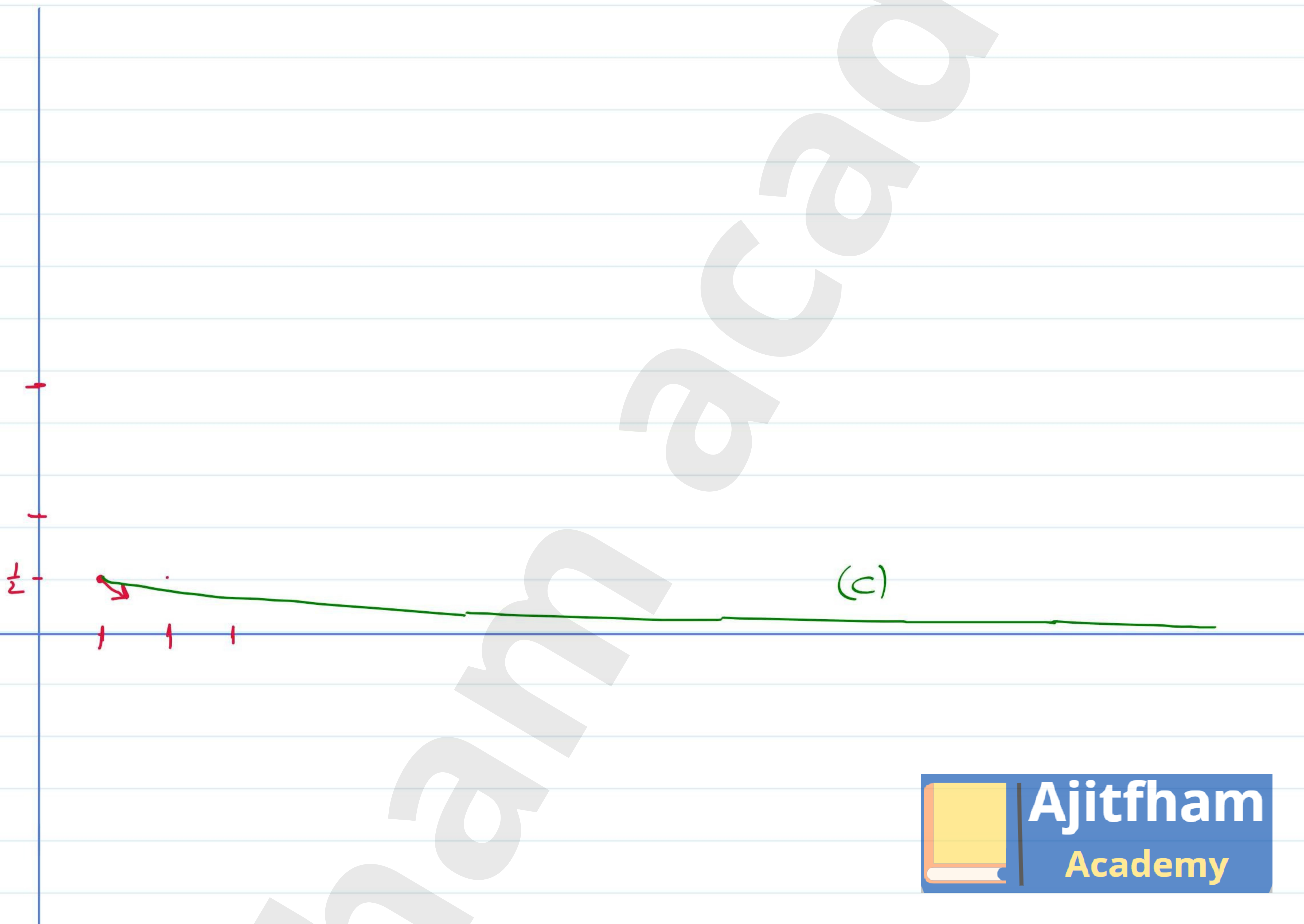
$$\text{Et on a } \frac{-2}{(x+1)^2} \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{I(x)}{J(x)} > 0 \rightarrow f'(x) \leq 0$$

$$\text{Donc } \forall x > 1 \quad -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$$

0.25 | 6- a) Dresser le tableau de variations de la fonction f



0.5 | b) Tracer la courbe (C) (On prendra $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 2\text{cm}$)



0.5 | 7- Montrer que l'équation $f(x) = x - 1$ admet une unique solution a dans $]1, 2[$

on pose $h(x) = f(x) - x + 1$

• h est continue sur $]1, 2[$ (comme somme de deux fonctions continues)
(f est dérivable sur $]1, +\infty[$ donc continue sur $]1, +\infty[$)

• h est strictement décroissante sur $]1, 2[$ ($h'(x) = f'(x) - 1 < 0$)

Alors h réalise une bijection de $]1, 2[$ vers $J = h(]1, 2[)$

$$h(]1, 2[) =]\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x); \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)[=]\frac{h(2)}{3} - 2 + 1; \frac{1}{2} - 1 + 1[=]\frac{h(2)}{3}; \frac{1}{2}[$$

• posez $0 \in J$ Alors d'après le Théorème de bijection :

$\exists ! a \in]1, 2[$ $f(a) = 0$ d'où le résultat.

8- Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$a_0 \in [1, +\infty[\quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = 1 + f(a_n)$$

0.5 | a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), |a_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |a_n - a|$

Soit $n \in \mathbb{N}$, par récurrence on montre facilement que $a_n \in [1; +\infty[\quad \forall n \in \mathbb{N}$
 On a :
 • f est continue sur $[1, +\infty[$
 • f est dérivable sur $]1; +\infty[$,
 • $\forall x \in]1, +\infty[\quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$



d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in]1, +\infty[\quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

pour $x = a_n$ et $y = a$ on trouve :

$$|f(a_n) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |a_n - a|$$

$$|1 + f(a_n) - (1 + f(a))| \leq \frac{1}{2} |a_n - a|$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |a_n - a|} \quad (\text{car } f(a) = a - 1)$$

0.5 | b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}), |a_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a|$

• pour $n=0$ $|a_0 - a| = \left(\frac{1}{2}\right)^0 |a_0 - a|$ l'inégalité est vérifiée pour $n=0$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|a_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a|$ (H.R)
 et montrons que $|a_{n+1} - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a_0 - a|$

$$\text{d'après 8)a :} \quad |a_{n+1} - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right) |a_n - a|$$

$$\text{et HR} \Rightarrow \frac{1}{2} |a_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a_0 - a|$$

$$\text{D'où} \quad |a_{n+1} - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a_0 - a|$$

• D'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a|$$

0.25

c) En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

$$\text{car } a: \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \text{car: } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a| = 0$$

$$\text{et car } |a_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a| \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

Dnc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a}$$

difficulté de EX 1 : 3/5

EXERCICE2 : (2.5 points)Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$

0.5

1-a) Montrer que F est continue, strictement croissante sur $[0;1]$

$t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors elle admet une fonction primitive

et F est sa primitive qui s'annule en 0, alors F est dérivable sur

$[0,1]$ dnc continue sur $[0,1]$ et car :

$$\forall x \in [0,1] \quad F'(x) = e^{x^2} > 0$$

Alors F est strictement croissante sur $[0,1]$.

0.5

b) En déduire que F est une bijection de $[0;1]$ vers $[0;\beta]$ avec $\beta = \int_0^1 e^{t^2} dt$

F est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ alors elle réalise une bijection de $[0,1]$ vers $F([0,1]) = [F(0); F(1)] = [0; \int_0^1 e^{t^2} dt] = [0, \beta]$

2- On note F^{-1} la bijection réciproque de F

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right)$

0.5

a) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\ell = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta F^{-1}(t) dt$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{1}{\beta} \times \frac{\beta - 0}{n} \sum_{k=1}^n F^{-1}\left(0 + \frac{\beta - 0}{n} k\right)$$

puisque F^{-1} est continue sur $[0, \beta]$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta F^{-1}(t) \cdot dt \quad \text{dnc} \quad \ell = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta F^{-1}(t) dt$$

0.5

b) Montrer que $\ell = \frac{1}{\beta} \int_0^1 u e^{u^2} du$ (On pourra effectuer le changement de variable $u = F^{-1}(t)$)

$$\ell = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta F^{-1}(t) dt$$

$$\text{on pose } u = F^{-1}(t) \Leftrightarrow t = F(u) \Leftrightarrow dt = F'(u) du \\ \Leftrightarrow dt = e^{u^2} du$$

$$\text{et si } t = 0 \text{ alors } u = F^{-1}(0) = 0$$

$$\text{si } t = \beta \text{ alors } u = F^{-1}(\beta) = 1$$

$$\text{donc } \int_0^\beta F^{-1}(t) dt = \int_0^1 u e^{u^2} du$$

d'où

$$\ell = \frac{1}{\beta} \int_0^1 u e^{u^2} du$$

0.5

c) En déduire que : $\ell = \frac{e-1}{2\beta}$

$$\ell = \frac{1}{\beta} \int_0^1 \frac{1}{2} (u^2)' e^{u^2} du = \frac{1}{2\beta} [e^{u^2}]_0^1 = \frac{1}{2\beta} (e^1 - e^0)$$

$$\ell = \frac{e-1}{2\beta}$$

difficulté de EX 2 : 3/5

Chronomètre

01:35:37.412

(Temps estimé : 2 heures)

EXERCICE 3 : (3.5 points)Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$(E_\alpha): z^2 - 2iz + \alpha = 0 \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{C}$$

Partie I :

0.25

1-a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_α) est $\Delta = -4(1+\alpha)$

$$\Delta = (-2i)^2 - 4 \times 1 \times \alpha = -4 - 4\alpha = -4(1+\alpha)$$

0.25

b) Déterminer l'ensemble des valeurs α pour lesquelles l'équation (E_α) admette dans l'ensemble $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes.

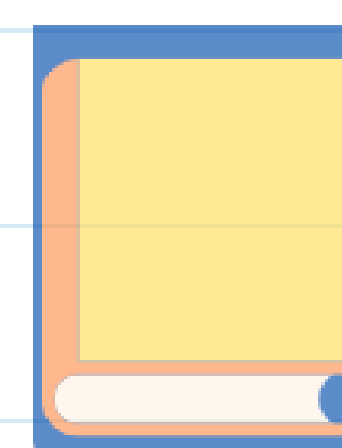
$$(E_\alpha) \text{ admet deux solutions distinctes dans } \mathbb{C} \Leftrightarrow \Delta \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -4(1+\alpha) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 1+\alpha \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha \neq -1$$

$$\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{C} - \{-1\}$$


Ajitfham
Academy

0.5

2- On note z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_α) .Déterminer $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2i}{1} = \boxed{2i}$$

$$z_1 \times z_2 = \frac{c}{a} = \frac{\alpha}{1} = \boxed{\alpha}$$

Partie II :Soient Ω , M_1 et M_2 les points d'affixes respectivement α , z_1 et z_2 1- On suppose que $\alpha = m^2 - 2m$ avec $m \in \mathbb{R}$

0.5

a) Déterminer z_1 et z_2 en fonction de m Calculons les racines de Δ :

$$\Delta = -4(1 + \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \Delta = -4(m^2 - 2m + 1)$$

$$\Leftrightarrow \Delta = (2i)^2 (m-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \Delta = [2i(m-1)]^2$$

$$\text{Alors } z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2i - 2i(m-1)}{2} = i(1 - (m-1)) = \boxed{i(2-m)}$$

$$\text{et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2i + 2i(m-1)}{2} = i(1 + m - 1) = \boxed{im}$$

0.25

b) En déduire que les points O , M_1 et M_2 sont alignés.

$$\begin{aligned} \text{On a } \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_0} &= \frac{im - i(2-m)}{im - 0} = \frac{im - 2i + im}{im} \\ &= \frac{m - 2 + m}{m} \\ &= \frac{2m - 2}{m} = \frac{2(m-1)}{m} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Alors O, M_1 et M_2 sont alignés.

0.25

a) Montrer que $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0$

$$\frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = -\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = -\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$\Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 = -\bar{z}_1 z_2$$

$$\Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 + \overline{(z_1 \bar{z}_2)} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0 \end{aligned}$$

0.5

b) Montrer que : $|z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 - 4 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2$$

et on a $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$

$$= z_1 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2$$

$$= z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 - z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1$$

$$= |z_1 + z_2|^2 - z_2 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2 - z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1$$

$$= |z_1 + z_2|^2 - 2(z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1)$$

$$= |z_1 + z_2|^2 - 2(2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2))$$

$$\boxed{|z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 - 4 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)}$$

0.25

c) En déduire que $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $|z_1 - z_2| = 2$

$$\frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0 \quad (\text{d'après 2a})$$

et d'après 2b $|z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 - 4 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$

Alors $\frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2$

$$= |2i|^2 \quad (\text{d'après I) 2})$$

$$= 4$$

Du $\hookrightarrow$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = 2}$$

0.25

3-a) Montrer que : $(z_1 - z_2)^2 = \Delta$

$$z_1 - z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{(-b - \sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{2\sqrt{\Delta}}{2a} = \sqrt{\Delta} \quad \text{alors } (z_1 - z_2)^2 = \Delta$$

0.5

b) Déterminer l'ensemble Γ des points Ω pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle en O

$$OM_1M_2 \text{ rectangle en } O \Leftrightarrow \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow |z_1 - z_2| = 2 \quad (\text{d'après II}) \quad 2 <)$$

$$\Leftrightarrow |(z_1 - z_2)^2| = 4$$

$$\Leftrightarrow |\Delta| = 4$$

$$\Leftrightarrow |-4(1+\alpha)| = 4$$

$$\Leftrightarrow |1+\alpha| = 1$$

$$\Leftrightarrow |\alpha + 1| = 1$$

$$\Leftrightarrow |\alpha - (-1)| = 1$$

Alors l'ensemble (Γ) des points $\Omega(\alpha)$ est le cercle de centre $A(-1)$ et de rayon 1.

EXERCICE 4 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif de zéro la

matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On considère dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ la loi de composition interne T définie par :

$$\forall ((a,b), (c,d)) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*)^2; (a,b)T(c,d) = (a\bar{d} + c, bd)$$

($\bar{d}$ étant le conjugué du nombre complexe d)

0.5

1-a) Vérifier que $(i,2)T(1,i) = (2,2i)$, puis calculer $(1,i)T(i,2)$

$$(i,2)T(1,i) = (i\bar{i} + 1; 2i) = (1+1; 2i) = (2; 2i)$$

$$\text{et } (1,i)T(i,2) = (1 \times \bar{2} + i; 2i) = (2+i; 2i)$$

0.25

b) En déduire que la loi T n'est pas commutative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$

$$T \text{ est commutative dans } \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \Leftrightarrow \forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \quad (a,b)T(c,d) = (c,d)T(a,b)$$

puisque $(i,2)T(1,i) \neq (1,i)T(i,2)$

0.5

2- Montrer que la loi T est associative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$

Soit $(a,b); (c,d); (e,f)$ dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$

$$\begin{aligned} \text{Car on : } ((a,b)T(c,d))T(e,f) &= (a\bar{d} + c; bd)T(e,f) \\ &= ((a\bar{d} + c)\bar{f} + e; bdf) \\ &= (a\bar{d}\bar{f} + c\bar{f} + e; bdf) \end{aligned}$$



$$(a,b)T((c,d)T(e,f)) = (a,b)T(c\bar{f}+e; d\bar{f}) \\ = (a\bar{d}\bar{f}+c\bar{f}+e; b\bar{d}\bar{f})$$

$$\text{Ainsi } (a,b)T((c,d)T(e,f)) = ((a,b)T(c,d))T(e,f)$$

Donc : T est associative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$,

0.25 | 3- Vérifier que $(0,1)$ est l'élément neutre pour T dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$

on a $(0,1) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$

$$\text{et ; } \forall (a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \quad (a,b)T(0,1) = (a\bar{1}+0; b\bar{1}) = (a;b)$$

$$\text{et } (0,1)T(a,b) = (0\bar{b}+a; 1\bar{b}) = (a,b)$$

Donc $(0,1)$ est l'élément neutre pour T dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$,

0.5 | 4-a) Vérifier que $\forall (a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* ; (a,b)T\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) = (0,1)$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \quad (a,b)T\left(-\frac{a}{b}; \frac{1}{b}\right) = \left(a \times \overline{\left(\frac{1}{b}\right)} + \left(-\frac{a}{b}\right); b \times \frac{1}{b}\right) \\ = \left(\frac{a}{b} - \frac{a}{b}; 1\right) \\ = (0,1)$$

0.5 | b) Montrer que $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$ est un groupe non commutatif.



on a : T est associative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$

T admet un élément neutre $(0,1)$ dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$,

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \quad (a,b)T\left(-\frac{a}{b}; \frac{1}{b}\right) = (0,1)$$

$$\text{et } \left(-\frac{a}{b}; \frac{1}{b}\right)T(a,b) = \left(-\frac{a}{b} \times \bar{b} + a; \frac{1}{b} \times b\right) = (0,1)$$

Ainsi tout élément de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ admet un symétrique pour T

$$\text{et } (a,b)^{-1} = \left(-\frac{a}{b}; \frac{1}{b}\right)$$

T n'est pas commutative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$

Donc $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*; T)$ est un groupe non commutatif.

0.5 | 5-a) Montrer que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est stable par la loi de composition interne T

$$\forall (a,b); (c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \quad (a,b) T (c,d) = (a\bar{d} + c; bd) = (ad + c; bd) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

Alors: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est stable par T ,

0.5 | b) Montrer que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$

$$\bullet \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$$

$$\bullet \quad (0,1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \quad \text{Alors } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \neq \emptyset$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \forall (a,b); (c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \quad (a,b) T (c,d)^{-1} &= (a,b) T \left(\frac{-c}{d}; \frac{1}{d} \right) \\ &= \left(a \left(\frac{1}{d} \right) + \left(\frac{-c}{d} \right); b \times \frac{1}{d} \right) \\ &= \left(\frac{a-c}{d}; \frac{b}{d} \right) \\ &= \left(\frac{a-c}{d}; \frac{b}{d} \right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \end{aligned}$$



Alors: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*; T)$

difficulté de EX 4 : 2/5

EXERCICES 5 : (3 points)

Soient p et q deux nombres premiers distincts et r un entier naturel premier avec p et avec q

1 | 1-a) Montrer que p divise $r^{p-1} - 1$ et que q divise $r^{q-1} - 1$

$$r \in \mathbb{N} \text{ et } p \wedge r = 1, \quad \text{d'après le Théorème de Fermat: } r^{p-1} \equiv 1 [p] \\ \Rightarrow p \text{ divise } r^{p-1} - 1$$

$$\text{et on a } q \wedge r = 1, \quad \text{d'après Fermat: } r^{q-1} \equiv 1 [q] \\ \Rightarrow q \text{ divise } r^{q-1} - 1$$

0.5 | b) En déduire que p et q divisent $r^{(p-1)(q-1)} - 1$

$$r^{p-1} \equiv 1 [p] \Rightarrow r^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 [p] \Rightarrow p \text{ divise } r^{(p-1)(q-1)} - 1$$

$$r^{q-1} \equiv 1 [q] \Rightarrow r^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 [q] \Rightarrow q \text{ divise } r^{(p-1)(q-1)} - 1$$

$$p, q \in \mathbb{P} \text{ et } p \neq q \Rightarrow p \wedge q = 1$$

$$\text{On a : } \begin{cases} p \mid r^{(p-1)(q-1)} - 1 \\ q \mid r^{(p-1)(q-1)} - 1 \end{cases} \Rightarrow pq \mid r^{(p-1)(q-1)} - 1$$

$$p \wedge q = 1$$

1

2- Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2024^{192}x \equiv 3 \pmod{221}$ (On donne : $221 = 13 \times 17$)

$$\text{On a } 2024^{192} = 2024^{(13-1)(17-1)}$$

$$\text{par } r = 2024 ; p = 13 ; q = 17$$

$p, q \in \mathbb{P}$ et $p \wedge r = 1$ et $q \wedge r = 1$, d'après ce qui précède :

$$2024^{(13-1)(17-1)} \equiv 1 \pmod{13 \times 17}$$

$$\Rightarrow 2024^{192} \equiv 1 \pmod{221}$$

$$\text{Donc } 2024^{192}x \equiv 3 \pmod{221} \Leftrightarrow x \equiv 3 \pmod{221}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = 3 + 221k$$

Les solutions sont : $S = \{3 + 221k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

difficulté de EX 4 : 1/5



Chronomètre

03:06:28.238

Continuer

Effacer

durée de l'épreuve est 4 heures
j'ai arrivé à le faire dans presque 3 h

**Pour accéder au contenu
gratuit de la préparation des
concours Médecine ENSA
ENSAM cliquez ici**

**Pour consulter le contenu de
préparation national
(Rattrapage) contactez nous sur
whatsapp **