Exercice 1 (1,5 pts)

0,25 **1.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$: $z^2 - 2z\cos x + 1 = \left(z - e^{ix}\right)\left(z - e^{-ix}\right)$

0,5 **2.** Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $z^5 - 1 = (z-1)\left(z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{5} + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{4\pi}{5} + 1\right)$

0,75 **3.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 1$ puis en déduire les valeurs de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

Exercice 2 (1,5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectifs m , $\bar{m}$, $m-i$ et $\bar{m}+i$ où $m \in \mathbb{C}^*$

0,5 **1.** Montrer que les points A, B, C et D sont alignés .

2. Soient R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et h l'homothétie de centre O et de rapport 2 .

On pose $h(A) = A'$ et $(R \circ h)(A) = A''$, et soit H le projeté orthogonal du point O sur la droite (AA'') .

Soit E le point d'affixe $m(2+i)$

0,25 **a-** Montrer que $(OE) \perp (AA'')$

0,5 **b-** Montrer que le point H a pour affixe le nombre complexe $\frac{2}{5}m(2+i)$

0,25 **c-** En déduire que les points A , A' , E et H sont cocycliques .

Exercice 2 (03 pts)

Soient p , q et r trois **entiers premiers positifs** tels que $p^2 + q^2 + r^2 = p^3$

0,5 **1.** Montrer que p , q et r sont impairs .

0,5 **2.** Montrer que $p \equiv 3[4]$

0,5 **3.** Montrer que : $p = q \Leftrightarrow p = r$

1 **4.** Montrer que si $p \neq q$ alors $q^{p-1} + r^{p-1} \equiv 2[p]$ et $q^{p-1} + r^{p-1} \equiv 0[p]$

0,5 **5.** En déduire que $p = q = r = 3$

Exercice 3 (1,5 pts)

Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

0,5 **1)** Montrer que $A^2 = 4A - 3I$, et en déduire que la matrice A admet un inverse A^{-1} qu'on déterminera

2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $D_k = A^{k+1} - A^k$

0,5 a) Montrer que $(\forall k \in \mathbb{N})\ D_{k+1} = 3D_k$

0,5 b) En déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 (3,5pts)

On considère l'ensemble $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & 3b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \right\}$. On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

0,5 **1)** a) Montrer que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel réel .

0,5 b) Montrer que (I, J) est une base de l'espace vectoriel $(E, +, .)$.

0,75 c) Calculer J^2 puis déterminer les coordonnées de $I + J + J^2 + ... + J^n$ dans la base (I, J) .(où $n \in \mathbb{N}$)

2) Soit f l'application de E vers $\mathbb{C}$ telle que , $\left(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\right)$ $f(M(a;b)) = a + ib\sqrt{2}$

0,5 a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C}, \times)$ vers $(E, \times)$.

0,75 b) En déduire que $(E, +, \times)$ est un corps

Exercice 4 (3,5pts)

On considère l'ensemble $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix} a+b & 3b \\ -b & a-b \end{pmatrix}\right\}$. On pose $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

0,5 **1)** a) Montrer que $(E,+,.)$ est un espace vectoriel réel .

0,5 b) Montrer que (I,J) est une base de l'espace vectoriel $(E,+,.)$.

0,75 c) Calculer J^2 puis déterminer les coordonnées de $I+J+J^2+...+J^n$ dans la base (I,J) .(où $n\in\mathbb{N}$)

2) Soit f l'application de E vers $\mathbb{C}$ telle que , $\left(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\right)\quad f\left(M(a;b)\right)=a+ib\sqrt{2}$

0,5 a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C},\times)$ vers $(E,\times)$.

0,75 b) En déduire que $(E,+,\times)$ est un corps

Problème (10 pts)

Partie1

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*/\{1\}$, On considère la fonction f_n tel que $\begin{cases} f_n(x)=\dfrac{x}{x^n-ln(x)} & ;x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$

et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0,5 **1.** Montrer que le domaine de définition de la fonction f_n est $D=\mathbb{R}^+$

0,75 **2.** Etudier la dérivabilité de la fonction f_n à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu .

0,75 **3.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et déterminer la branche infinie de la courbe (C_n) au voisinage de $+\infty$

4. Soit g_n la fonction définie par : $(\forall x\in]0,+\infty[)\quad g_n(x)=1+(1-n)x^n-ln(x)$

0,75 a- Montrer que g_n est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

0,75 b- Montrer que l'équation $g_n(x)=0$ admet une solution unique α_n dans $]0,+\infty[$ et que $0<\alpha_n\leq 1$

0,5 c- Montrer que $(\forall n\geq 2)\quad \dfrac{1}{n-1}\leq(\alpha_n)^n\leq 1$

0,5 d- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

0,5 e- Déterminer le signe de $g_n(x)$ pour tout x dans $]0,+\infty[$

0,75 **5.** a- Montrer que f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $(\forall x\in]0,+\infty[)\quad f_n'(x)=\dfrac{g_n(x)}{\left(x^n-ln(x)\right)^2}$

0,5 b- Donner le tableau de variations de la fonction f_n

0,5 **6.** Représenter la courbe (C_2) dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie2

1. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ tel que $f(0)=0$ et $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\quad f(x)=\dfrac{1}{x-ln(x)}$

0,5 Montrer que la fonction f est continue sur $[0;+\infty[$

2. On considère la fonction F tel que $F(x)=\int_x^{2x} f(t)dt$, et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0,5 **a-** Montrer que la fonction F est définie et dérivable sur $[0;+\infty[$

0,75 **b-** Montrer que $F_d'(0)=0$ et $(\forall x>0)\quad F'(x)=\left(ln(2)-ln(x)\right)f(2x)f(x)$

0,25 **c-** Calculer $\int_x^{2x}\dfrac{1}{t}dt$ pour tout $x\in]0;+\infty[$

0,75 **d-** Montrer que $(\forall x\geq 1)\quad 0\leq F(x)-ln(2)\leq\dfrac{ln(2x)}{x-ln(x)}$ et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

0,75 **e-** Montrer que $F\left(\dfrac{1}{2}\right)\leq ln(2)$, et que $\left(\exists\alpha\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]\right)\quad F(\alpha)=ln(2)$

0,5 **f-** Donner le tableau de variations de la fonction F

0,5 **g-** Tracer la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (on prend : $F(1)\simeq 0,9$ et $F(2)\simeq 1,1$)

Problème (10 pts)

Partie1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^* / \{1\}$, On considère la fonction f_n tel que $\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{x}{x^n - ln(x)} & ; x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

0,5 **1.** Montrer que le domaine de définition de la fonction f_n est $D = \mathbb{R}^+$

0,75 **2.** Etudier la dérivabilité de la fonction f_n à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu .

0,75 **3.** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ et déterminer la branche infinie de la courbe (C_n) au voisinage de $+\infty$

4. Soit g_n la fonction définie par : $(\forall x \in]0,+\infty[)\quad g_n(x) = 1 + (1-n)x^n - ln(x)$

0,75 a- Montrer que g_n est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

0,75 b- Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans $]0,+\infty[$ et que $0 < \alpha_n \leq 1$

0,5 c- Montrer que $(\forall n \geq 2)\quad \dfrac{1}{n-1} \leq (\alpha_n)^n \leq 1$

0,5 d- Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$

0,5 e- Déterminer le signe de $g_n(x)$ pour tout x dans $]0,+\infty[$

0,75 **5.** a- Montrer que f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $(\forall x \in]0,+\infty[)\quad f_n'(x) = \dfrac{g_n(x)}{\left(x^n - ln(x)\right)^2}$

0,5 b- Donner le tableau de variations de la fonction f_n

0,5 **6.** Représenter la courbe (C_2) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie2

1. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ tel que $f(0) = 0$ et $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\quad f(x) = \dfrac{1}{x - ln(x)}$

0,5 Montrer que la fonction f est continue sur $[0;+\infty[$

2. On considère la fonction F tel que $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt$, et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

0,5 **a-** Montrer que la fonction F est définie et dérivable sur $[0;+\infty[$

0,75 **b-** Montrer que $F_d'(0) = 0$ et $(\forall x > 0)\ F'(x) = (ln(2) - ln(x)) f(2x) f(x)$

0,25 **c-** Calculer $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt$ pour tout $x \in]0;+\infty[$

0,75 **d-** Montrer que $(\forall x \geq 1)\ 0 \leq F(x) - ln(2) \leq \dfrac{ln(2x)}{x - ln(x)}$ et déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

0,75 **e-** Montrer que $F\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq ln(2)$, et que $\left(\exists \alpha \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]\right)\quad F(\alpha) = ln(2)$

0,5 **f-** Donner le tableau de variations de la fonction F

0,5 **g-** Tracer la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (on prend : $F(1) \simeq 0{,}9$ et $F(2) \simeq 1{,}1$)

Réponse :

1) • Si $x \in \mathbb{R}_+^*$; $f_n(x) = \dfrac{x}{x^n - \ln x}$

on a $x^n - \ln x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

f_n est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$

• Si $x = 0$: $f_n(0) = 0$

Donc $D_f = \mathbb{R}_+^* \cup \{0\} = \mathbb{R}_+$