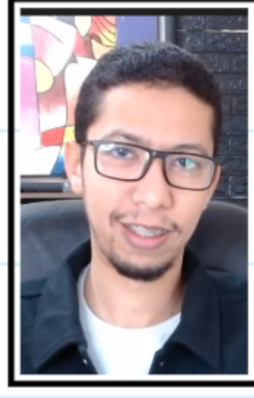
ZAKARIA Bouicha
WtSp: 0617074062

Les limites et la continuité

2 Bac sciences exp

Ex 1 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x-x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x^2+x}\right)$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{3x\sqrt{x^2+x}-3x^2+x}{5\sqrt{x^2+3}}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{8-2x}} \quad ; \quad \lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}-x \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x-2}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}$$

Ex 2 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{7x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{\sin x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x-\sin x}{\sqrt{x}} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x.\sin 2x}{1-\cos x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$$

Ex 3 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left|x^2-2x\right|-8}{x^2-5x+4} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-4}}{x+\sqrt{x+2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^4-x^3}-x^2 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}x\sqrt{4x^2+3x-7}-2x^2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{10x^2+9}-7}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x^2+5}-5} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3+\alpha x^2+x+1}-x\sqrt{x+1} \quad (\text{où } \alpha\in\mathbb{R})$$

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x^2-ax}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x-a}} \quad (\text{où } a\in\mathbb{R})$$

Ex 4 :

Déterminer le réel a pour que la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{\sin x}-1}{x-\frac{\pi}{2}} & \text{si } x\neq\dfrac{\pi}{2} \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a \end{cases}$$

soit continue au point $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

Ex 5 :

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^5-x^4+x^3+3}{x+1} & \text{si } x\neq-1 \\ f(-1)=12 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue en -1.

Ex 6 :

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2} & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=-\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue en 0.

Ex 7 :

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f au point x_0 :

1) $f(x)=\dfrac{\left|x^2-5\right|+3}{\sqrt{x}+2}$ et $x_0=1$

2) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-8}{\sqrt{x^2+5}-3} & \text{si } x\neq 2 \\ f(2)=18 \end{cases}$ et $x_0=2$

3) $\begin{cases} f(x)=\left(x^2-9\right).\sin\left(\dfrac{1}{x-3}\right) & \text{si } x\neq 3 \\ f(3)=0 \end{cases}$ et $x_0=3$

4) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{(1-\tan x)^2}{1+\cos 4x} & \text{si } x\neq\dfrac{\pi}{4} \\ f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ et $x_0=\dfrac{\pi}{4}$

EX 8 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+x}$$

1) Déterminer D_f ensemble de définition de f.

2) Calculer les limites : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

3) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1;2]$.

4) Soit g la restriction de la fonction f sur $]-\infty;-1]$.

a) Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-1]$.

b) En déduire que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.

c) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

EX 9 :

Soit f la fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{x-1}-2\sqrt[4]{x-1}$$

1) a) Montrer que pour tout $[1;+\infty[$:

$$f(x)=\left(\sqrt[4]{x-1}-1\right)^2-1$$

b) Calculer la limite : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que f est continue sur $I=[2;+\infty[$.

b) Montrer que f est strictement croissante sur I.

c) Soit g la restriction de la fonction f sur I.

Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

EX 10 (Devoir pour préparer à l'exam)

A) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+5}}{\sqrt[3]{x^3+2}} \quad ; \quad \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}+2x-1\right) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+8}-x\right)$$

B) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$$\sqrt[3]{x^2+2x+2}=1 \quad ; \quad (3x-5)^3+65=0$$

$$\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}-6=0 \quad ; \quad x^6+10=0$$

$$\sqrt[3]{3x-1}<2 \quad ; \quad \sqrt[5]{x+3}\geq 2 \quad ; \quad \sqrt[3]{4-x}\leq 2$$

C) Étudier la continuité de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x}}{x^2-2x} & \text{si } x>4 \\ f(4)=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$ et $I=[4;+\infty[$.

2) $\begin{cases} f(x)=x^2-4x+5 & \text{si } x<3 \\ f(x)=\sqrt[3]{5x-7} & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$ et $I=\mathbb{R}$.

D) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=x^5+2x^3+5x-3$$

Montrer que la courbe $\mathscr{C}_h$ de la fonction h coupe l'axe des abscisses en un unique point sur $\mathbb{R}$ puis vérifier que son abscisse α appartient à $]0;1[$.

E) Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I=[4;+\infty[$ par : $f(x)=\left(x-2\sqrt{x}\right)^3$.

1) Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) Justifier la continuité de la fonction f sur I.

3) a) Vérifier que pour tout $x\in I$:

$$f(x)=\left(\left(\sqrt{x}-1\right)^2-1\right)^3$$

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I.

4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.