année : 2021/2022 Durée : 4 heures	Examen national blanc 2 bac sciences maths	Ajitfham Academy zakaria bouicha

Exercice 1

zakaria bouicha

1-Soit x un entier non nul premier avec 53.

a-S'assurer que $x^{52} \equiv 1\ [53]$.

b-En déduire que pour tout entier naturel k , $x^{52k+1} \equiv x\ [53]$.

2-Soit l'équation (E_1) : $x^{29} \equiv 2\ [53]$ ou $x \in \mathbb{Z}$.

Montrer que 2^9 est une solution de (E_1).

3-Soit x est une solution de (E_1).

a-Montrer que x est premier avec 53.

b-Montrer que $x^{261} \equiv x\ [53]$.

c-En déduire que $x \equiv 2^9\ [53]$.

4-a- Montrer que $2^9 \equiv 35\ [53]$.

b-Donner alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_1).

5-On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_2) : $71\alpha - 53\beta = 1$.

a-Vérifier que $(3,4)$ est une soultion l'équation (E_2).

b-Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_2).

6- Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x \equiv 34\ [71] \\ x^{29} \equiv 2\ [53] \end{cases}$

Exercice 2

On considère dans l'espace vectoriel reél $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, .)$ l'ensemble

$$E = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \text{ on pose } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1- a-Montrer que $(E, +)$ est un groupe commutatif .

b- Montrer que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel reél

et donner sa dimension

2-Calculer J^2 en fonction de I et J et en deduire le produit

$$M(a,b) \times M(c,d)$$

3-On considère l'application f définie par $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$

$$M(a,b) \longmapsto z = (a+b) + ib$$

a- Montrer que f est un iomorphisme de $(E,\times)$ vers $(\mathbb{C},\times)$.

b -En déduire la structure de $(E, +, \times)$.

c -Determiner dans E l'ensemble des solutions de l'equation $M^3 - I + J = \theta$

avec θ est la matrice nulle dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3

Soit m *un nombre complexe non nul avec* $m \neq \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$.

On considère dans $\mathbb{C}$ *l'équation* $(\boldsymbol{E}) : \boldsymbol{z^2 - \big(1 + m(2+i)\big)z + 2m(1+im) = 0}$.

1-a-Vérifier que le discriminant de (E) *s'ecrit* $\Delta = \big(1 + m(-2+i)\big)^2$

b- Résoudre l'équation (E) .

2-On suppose que $m \neq i$ *et on pose* $u = \frac{2m}{1+im}$

a-Montrer que $u \in \mathbb{R} \iff |m|^2 = Im(m)$.

b-En déduire l'ensemble des points $M(m)$ *pour que* $u \in \mathbb{R}$.

3- Le plan complexe est rapporté á un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient M , A *et* B *les points d'affixes respectives* m , $-i$ *et* u .

a-Montere que les points A, M *et* O *sont alignés* $\iff m \in i\mathbb{R}$

b-Montere que $\frac{u+1}{u} = \frac{1}{2}\frac{m+i}{m}$.

c-En déduire que si $m \notin i\mathbb{R}$ *alors les points* A, M, O *et* B *sont cocycliques* .

Problème

On considère la fonction numérique f *définie sur* $[0, +\infty[$ *par :*

$$\boldsymbol{f(x) = (x+1)e^{-x}}$$

Partie ①

1-a- Montrer que pour tout nombre réel positif x , *il existe un réel* $c_x \in \,]x, 2x[$

tel que $f(2x) - f(x) = -xc_x e^{-c_x}$

b-En déduire que pour tout $x > 0$, $f(2x) - f(x) < 0$

2- Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(2x) - f(x) = 0$

Partie ②

Soit F *la fonction numérique définie sur* $[0, +\infty[$ *par :*

$$\boldsymbol{F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{1+te^{-t}}dt \; , x > 0 \text{ } \textit{et} \text{ } F(0) = 0}$$

1-a-Verifier que pour tout $x \in [0,1]$, $1 - x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - \frac{x}{2}$

b- En déduire que pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$1 - te^{-t} \leq \frac{1}{1+te^{-t}} \leq 1 - \frac{te^{-t}}{2}$$

c- Montrer que pour tout nombre réel positif x ,

$$x + f(2x) - f(x) \leq F(x) \leq x + \frac{1}{2}\big(f(2x) - f(x)\big)$$

d- En déduire que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$, puis que la droite (D) d'équation

$y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_F)

e-Etudier la position relative de (D) et (C_F).

2- Montrer que F est dérivable à droite au point zéro puis déterminer $F'_d(0)$.

3-a- Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que pour tout $x \in]0,+\infty[$

$F'(x) = \frac{e^{2x}+2x(e^x-1)}{(e^{2x}+2x)(1+xe^{-x})}$

b- Dresser le tableau de variations de F .

c-Soit S l'aire du domaine situé entre la courbe $\mathcal{C}_F$ et la droite (Δ) et les deux droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Montrer que $0 \leq S \leq \frac{1}{4}$

Partie ③

Soit n un entier naturel non nul .

1-a- Montrer qu'il existe $\alpha_n \in [0,+\infty[$ tel que $\int_{\alpha_n}^{2\alpha_n} \frac{1}{1+te^{-t}} dt = e^{-n}$

b- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n>0}$ est croissante

puis déduire qu'elle converge .

c- Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$U_n = \int_0^{\alpha_n} F(t)\, dt$ pour tout entier naturel non nul n .

a- Montrer qu'il existe $\beta_n \in [0, \alpha_n[$ tel que $U_n = \alpha_n F(\beta_n)$.

b- Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ est croissante

puis déduire qu'elle converge en determinant sa limite .

3-On considère la suite numérique $(V_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \geq 1$ par

$$V_n = n\left(F\left(u_n + \frac{2}{n}\right)\right) - F\left(u_n + \frac{1}{n}\right)$$

a-En utilisant le théorème des accroissement finis , Montrer qu'il existe

$$\gamma_n \in \left]u_n + \frac{1}{n}, u_n + \frac{2}{n}\right[\quad , \quad V_n = \frac{e^{2\gamma_n} + 2\gamma_n(e^{\gamma_n}-1)}{(e^{2\gamma_n} + 2\gamma_n)(1+\gamma_n e^{-\gamma_n})}$$

b- En déduire que la suite numérique $(V_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis déterminer sa limite .