

Chapter 1. Fourier 해석

1.1 Fourier 급수

(1) 주기함수

일정한 주기마다 같은 형태가 반복되는 함수를 주기함수라고 합니다

$$f(x + p) = f(x)$$

$$f(x + 2p) = f(x)$$

$$f(x + 3p) = f(x)$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$f(x + np) = f(x)$$

- ① $p, 2p, 3p, \dots, np$ 모두 $f(x)$ 의 주기입니다
- ② 주기 중에서 가장 작은 주기(p)를 기본주기라고 합니다
- ③ 기본 주기의 n 배는 모두 주기가 됩니다
- ④ 기본 주기가 $p, 2p, 3p, \dots, np$ 인 주기함수 $f(x)$ 의 급수의 기본주기는 가장 큰 주기인 np 가 됩니다

ex) $\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x$ 의 기본주기와 급수의 주기를 구하시오

Chapter 1. Fourier 해석

(2) 주기가 2π 인 Fourier 급수

주기함수 $f(x)$ 를 삼각함수의 급수로 나타낸 것을 Fourier 급수라 하고 아래와 같이 나타낼 수 있습니다

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\nu) x + b_n \sin(n\nu) x\}$$

로 나타낼 수 있으려 주기가 2π 인 경우에는 $\frac{2\pi}{|\nu|} = 2\pi$ 이므로 $\nu = 1$ 이 됩니다

따라서 주기가 2π 인 경우 Fourier 급수는 아래와 같이 됩니다

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n) x + b_n \sin(n) x\}$$

(3) Fourier 계수

Fourier 급수를 구하기 위해서는 a_0 , a_n , b_n 를 구하는 것이며, 이 a_0 , a_n , b_n 을 Fourier 계수라고 합니다. 이 계수를 구하기 위해서는 함수의 직교 성질을 이용합니다

① 함수의 직교성

어떠한 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 직교한다는 의미는 이 두 함수의 내적이 0이 된다는 의미입니다

$$\langle f, g \rangle = \int_{\text{주기}} (f(x)g(x))dx = 0$$

Chapter 1. Fourier 해석

② 삼각함수의 직교성

㉠ $\langle \cos(nx), 1 \rangle = 0$

㉡ $\langle \sin(nx), 1 \rangle = 0$

㉢ $\langle \sin(nx), \cos(mx) \rangle = 0$

㉣ $\langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = 0 \ (m \neq n)$

$\langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = \pi \ (m = n)$

㉤ $\langle \cos(nx), \cos(mx) \rangle = 0 \ (m \neq n)$

$\langle \cos(nx), \cos(mx) \rangle = \pi \ (m = n)$

③ Fourier 계수 구하기

㉠ a_0 : Fourier 급수 양변에 1과의 함수 내적을 취하여 a_n, b_n 을 제거하여 구합니다

$$\langle f(x), 1 \rangle = \langle a_0, 1 \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \langle \cos nx, 1 \rangle + b_n \langle \sin nx, 1 \rangle\}$$

$$\langle f(x), 1 \rangle = \langle a_0, 1 \rangle$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Chapter 1. Fourier 해석

㉞ a_n : Fourier 급수 양변에 $\cos mx$ 와의 함수 내적을 취하여 a_0, b_n 을 제거하여 구합니다

$$\langle f(x), \cos mx \rangle = \langle a_0, \cos mx \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \langle \cos nx, \cos mx \rangle + b_n \langle \sin nx, \cos mx \rangle\}$$

$$\langle f(x), \cos mx \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \langle \cos nx, \cos mx \rangle\}$$

$$\langle f(x), \cos mx \rangle = a_n \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

㉟ b_n : Fourier 급수 양변에 $\sin mx$ 와의 함수 내적을 취하여 a_0, a_n 을 제거하여 구합니다

$$\langle f(x), \sin mx \rangle = \langle a_0, \sin mx \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \langle \cos nx, \sin mx \rangle + b_n \langle \sin nx, \sin mx \rangle\}$$

$$\langle f(x), \sin mx \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \{b_n \langle \sin nx, \sin mx \rangle\}$$

$$\langle f(x), \sin mx \rangle = b_n \pi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

ex) 주기함수 $f(x) = -k(-\pi < x < 0)$, $k(0 < x < \pi)$ 의 Fourier 급수를 구하시오