APEE Association pour la promotion de l'Enseignement d'Excellence

LYCEE MOHAMMED VI D'EXCELLENCE

2Sm A/B ***EXAMEN BLANC 1*** ***A.S : 2022-2023***

Date : 19 Mai 2023 ***Durée :4h*** ***Coefficient : 9***

INSTRUCTIONS GÉNÉRALES

1. L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
2. Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient.
3. Ne pas oublier de noter les pages de vos copies
4. L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices repartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	structures algébriques	3,5 points
Exercice 2	Arithmétique	3 points
Exercice 3	les nombres complexes	3,5 points
Exercice 4	Analyse	10 points

Exercice 1 **3,5 points**

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On considère les deux matrices : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble $E=\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\-y&x+\sqrt{3}y\end{pmatrix}/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

0,5 pt 1.(a) Montrer que $(E,+,\cdot)$ est espace vectoriel réel.

0,5 pt (b) Montrer que (I,J) est une famille libre, puis en déduire la dimension de l'espace vectoriel E.

0,25 pt 2.(a) Vérifier que $J^2=\sqrt{3}J-I$.

0,5 pt (b) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,25 pt 3. Soit $a\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$. Montrer que $(1,a)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

4. On considère l'application $\varphi_a\colon E\to\mathbb{C}$ définie par :

$$\begin{array}{rccc}\varphi_a & : & E & \to & \mathbb{C}\\ & & M(x,y) & \mapsto & x+ay\end{array}$$

0,5 pt (a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(E,+)$ vers $(\mathbb{C},+)$.

0,5 pt (b) Déterminer les valeurs de a tels que φ_a soit un homomorphisme de $(E,\times)$ vers $(\mathbb{C},\times)$.

0,5 pt (c) Posons $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$. Soit n dans $\mathbb{N}$.
Calculer $\varphi_a(J^n)$ en fonction de n, en déduire que : $J^n=I\Leftrightarrow n\equiv 0[12]$.

Exercice 2 **3 points**

Partie A :

Soit $n\in\mathbb{N}$, tel que : $n\geq 2$.

Posons $U_n=\overline{\underbrace{55\ldots5}_{n\,fois}}^{(7)}$ l'écriture dans la base 7.

0,75 pt 1. Montrer que : $6U_n=5(7^n-1)$, en déduire que $U_{n+1}\wedge 7=1$.

0,5 pt 2. Montrer que : $U_{n+1}\wedge U_n=5$.

Partie B :

On admet que 2003 est un nombre premier.

Soit x un entier naturel tel que : $x^2+1\equiv 0\ [2003]$

0,5 pt 1. Montrer que : $x^{2003}\equiv -x\ [2003]$.

0,75 pt 2. Montrer que : $x^{2003}\equiv x\ [2003]$, en déduire que $2x\equiv 0\ [2003]$.

0,5 pt 3. Montrer que l'équation : $x^2+1\equiv 0\ [2003]$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$.

Exercice 3 **3,5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormée direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soit $m \in \mathbb{C}^*$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) : 2z^2 + m(1+i)z + m^2(1+i) = 0$$

0,25 pt 1.(a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\triangle = (m(1-3i))^2$.

0,5 pt (b) Résoudre l'équation (E).

0,25 pt (c) Déterminer la forme algébrique de m tel que : $z_1 \times z_2 = 1$.

0,5 pt (d) Dans cette question en suppose que $m = e^{i\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Écrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.

2. On considère les points A, B et C respectivement d'affixes $a = -im$, $b = -\dfrac{m}{2} + \frac{1}{2}im$, $c = -m - \frac{1}{2}mi$.

0,75 pt (a) Vérifier que : $\dfrac{b-c}{a-c} = i$, en déduire la nature du triangle ABC.

0,5 pt (b) Soit (Γ) l'ensemble des points $M(m)$ du plan, tel que le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC égale $\sqrt{10}$. Montrer que (Γ) est un cercle de centre O et de rayon 4.

3. On considère la transformation F qui associer à chaque point $M(Z)$ le point $M^{'}(Z^{'})$ tel que :

$$Z^{'} = 2iZ - m(2+i)$$

0,5 pt (a) Déterminer la nature de F.

0,25 pt (b) Déterminer l'image du cercle (Γ) par F.

Exercice 4 **10 points**

Partie I)

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = (2-x)e^x - 2$$

0,5 pt 1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x)$.

0,5 pt 2. Dresser le tableau de variations de la fonction φ.

0,5 pt 3. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet unique solution α dans $[1, +\infty[$ et que $1,59 < \alpha < 1,60$.

Partie II)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) &= \dfrac{x^2}{e^x - 1}, \quad x \neq 0 \\ f(0) &= 0 \end{cases}$$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que : $||\overrightarrow{i}|| = ||\overrightarrow{j}|| = 2cm$.

0,25 pt 1. Étudier la continuité de la fonction f en 0.

0,5 pt 2. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

0,25 pt 3.(a) Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0.

0,5 pt (b) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad f'(x) = \dfrac{x\varphi(x)}{(e^x - 1)^2}$

0,5 pt (c) Montrer que : $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f. (remarquer que $\varphi(0) = 0$)

0,5 pt 4. Étudier les branches infinies de la courbe (C_f).

0,5 pt 5. Construire (C_f).

Partie III) On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t} dt$

0,75 pt 1. Calculer $G(x)$ et $\lim\limits_{+\infty} G(x)$.

0,25 pt 2. Montrer que la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

0,5 pt 3.(a) Montrer que $(\forall t \in [\ln 2, +\infty[) \quad f(t) \leq 2t^2 e^{-t}$.

0,5 pt (b) Montrer que la fonction F est majorée sur $\mathbb{R}^+$.

Partie IV)

On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = L$, où $L \in \mathbb{R}$

0,25 pt 1.(a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}^*)$ $\dfrac{1}{e^x - 1} = \dfrac{e^{-nx}}{e^x - 1} + \sum\limits_{p=1}^{n} e^{-px}$.

0,5 pt (b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $0 \leq \int_0^x f(t)e^{-nt}dt \leq \dfrac{\alpha(2 - \alpha)}{n}$.

0,5 pt (c) Calculer $I_n(x) = \int_0^x t^2 e^{-nt} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$(on pourra utiliser l'intégration par partie)

0,25 pt (d) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} I_n(x)$.

0,5 pt 2.(a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $\int_0^x f(t)e^{-nt}dt = F(x) - \sum\limits_{p=1}^{n} I_p(x)$

0,25 pt (b) En déduire que la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)e^{-nt}dt$ admet une limite fini lorsque $x \to +\infty$.

0,5 pt (c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L_n = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)e^{-nt}dt$.

Montrer que $L - L_n = 2(1 + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3})$.

0,25 pt (d) Montrer que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.(utiliser la question IV) 1-b)

0,5 pt (e) On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $U_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}$

Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{L}{2}$.