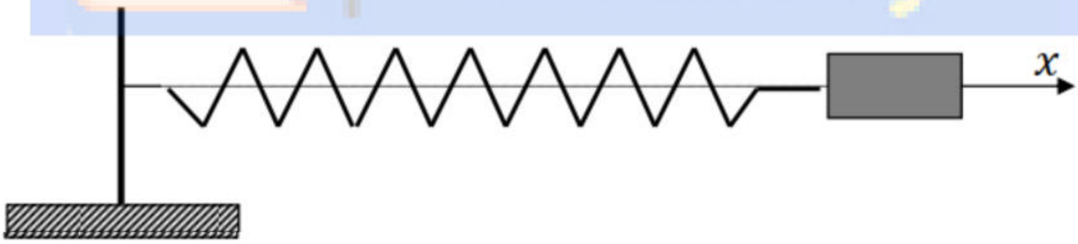
Exercice 1

Une tige horizontale Ax est fixée en A à un support vertical. Un ressort à spires non jointives, de masse négligeable, de raideur $K = 20 N.m^{-1}$ est enfilé sur la tige Ax et fixé en A au même support. L'autre extrémité du ressort est liée à un solide S, de masse $m = 10 g$. Le solide S et le ressort peuvent coulisser sans frottement le long de la tige Ax. Le ressort n'étant ni comprimé ni étiré. Le centre d'inertie G de solide S se trouve en O, position que l'on prendra pour origine des abscisses (voir la figure ci-dessous).

En comprimant le ressort, on écarte S de sa position d'équilibre. L'abscisse de son centre d'inertie est alors $x_0 = -4{,}00 cm$. A la date $t = 0$, on lâche S sans vitesse initiale.

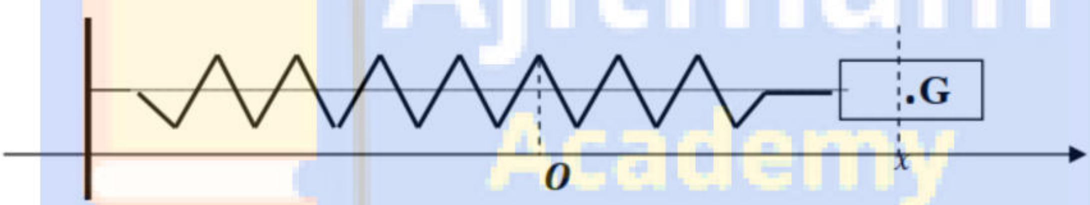


1.
   a) Etablir l'équation différentielle du mouvement de G.
   b) En déduire l'équation horaire du mouvement.
2. Calculer la vitesse de G au premier passage par la position d'équilibre.

3. Exprimer à la date t, l'énergie cinétique de S, l'énergie potentielle de S lié au ressort (on considère que l'énergie potentielle pour la position d'équilibre du système est nulle). En déduire l'énergie mécanique de S. Montrer qu'elle est constante et calculer sa valeur.

Exercice 2

Un mobile de masse m placé sur un banc à coussin d'air horizontal, est lié à un ressort à spires non jointives, de raideur k, de masse négligeable. Ce mobile oscille sans frottement, parallèlement à une direction (x', x). A l'équilibre, le centre d'inertie G du mobile coïncide avec l'origine 0 du repère.



1. *Etude expérimentale*

Une interface appropriée permet de transmettre à un ordinateur une tension U, proportionnelle à l'abscisse x de G, fonction du temps. Lorsque le mobile oscille, l'examen de la courbe visualisée sur l'écran permet de relever le tableau de mesures ci-dessous, les valeurs extrêmes correspondant à des extrema de la courbe. Un étalonnage préliminaire a montré par ailleurs que la valeur $U = +5V$ correspond à l'abscisse $x = 10cm$.

a) Compléter la dernière ligne du tableau donnant l'abscisse x de G.

b) Tracer la courbe $x = f(t)$ en prenant pour échelles $1cm$ pour $50ms$ en abscisse, $1cm$ pour $1cm$ en ordonnée.

$t(ms)$	0	87	175	262	350	437	525
$U(V)$	-3,0	-2,1	0	+2,1	+3,0	+2,1	0
$x(cm)$	…	…	…	…	…	…	…

612	700	787	875
-2,1	-3,0	-2,1	0
…	…	…	…

2. *Etude théorique*
   a) Faire l'inventaire des forces extérieures qui agissent sur le mobile et les représenter sur un schéma.
   b) Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement de G.
   c) Donner l'expression générale de l'équation horaire $x(t)$.
3. *Exploitation*

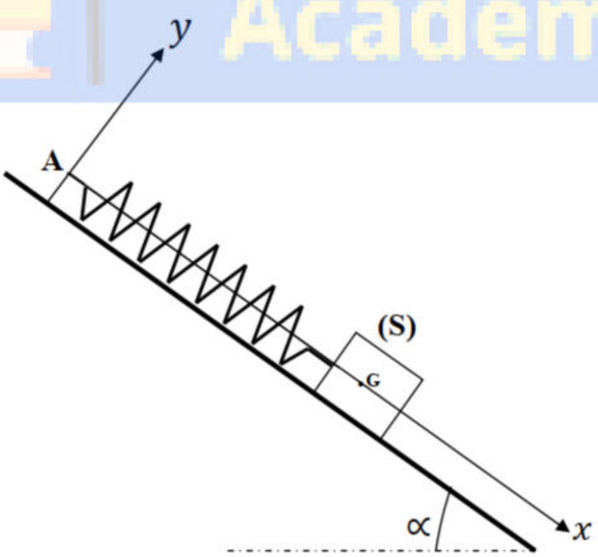
La courbe $x = f(t)$ établie dans la partie 1. va maintenant être analysée.

   a) Déterminer la période T du mouvement de G et en déduire la pulsation ω.
   b) Mesurer l'amplitude X_m du mouvement de G.
   c) L'origine des dates est l'instant $t = 0$ du tableau. Préciser la phase à l'origine des dates et donner l'expression numérique de $x(t)$.
   d) Calculer la raideur k du ressort, sachant que $m = 240g$.
   e) Déterminer son énergie mécanique et en déduire la vitesse au passage par sa position d'équilibre.

612	700	787	875
-2,1	-3,0	-2,1	0
…	…	…	…

Exercice 3

Un solide S, de masse $m = 200g$ et de centre d'inertie, G peut se déplacer d'un mouvement de translation rectiligne, sans frottement, le long d'un banc à coussin d'air. Celui-ci fait un angle $\alpha = 10°$ avec l'horizontale. Le solide est attaché à l'extrémité inférieure d'un ressort de masse négligeable, à spire non jointives et à réponse linéaire ; l'autre extrémité du ressort est fixée en A. On prendra $g = 10m.s^{-1}$.



1. Le solide S étant en équilibre, son centre d'inertie est en G_0.
Le ressort, dont l'axe est à la direction du banc, a subi un allongement $\Delta l_0 = 6cm$.

a) Représenter les forces qui s'exercent sur le solide S.

b) Ecrire la condition d'équilibre du solide S sous forme vectorielle et projeter la relation suivant les deux axes (o, x)et (o, y).

c) Exprimer le coefficient de raideur K du ressort en fonction des données. Calculer sa valeur numérique.

2. On écarte le solide de sa position d'équilibre vers le bas. Son centre d'inertie est alors en G_1. La distance G_0G_1 mesurée le long du banc vaut $d = 5cm$. On abandonne le solide sans vitesse à une date que l'on prendra pour origine des temps. La position G_0 sera prise comme origine des abscisses.

a) Ecrire la relation de la dynamique (ou théorème du centre d'inertie).

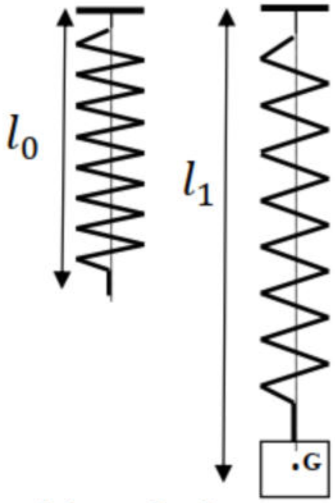
b) Etablir l'équation différentielle du mouvement.

c) Déterminer l'équation horaire du mouvement.

Exercice 4

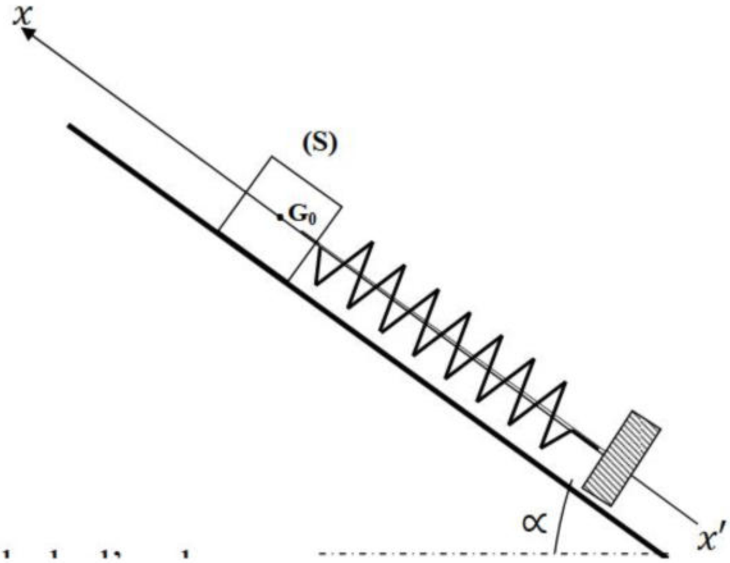
Soit un ressort idéal vertical, à spires non jointives de coefficient de raideur k, de longueur à vide l_0. Une de ses extrémités étant fixée,on accroche à l'autre extrémité un objet S, de centre d'inertie G, de masse m, d'épaisseur négligeable devant la longueur du ressort qui est égale à l_1.

Données numériques : $l_0 = 12{,}0cm$; $l_1 = 14{,}0cm$; $m = 100g$; $g = 10m.s^{-2}$.



A. Calculer le coefficient de raideur k du ressort.

B. Le solide (S) fixé au ressort est alors astreint à se déplacer suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontal. S étant au repos, la longueur du ressort est alors $l_2 = 11{,}5cm$, G est en G_0. Les positions respectivesdu centre de masse G de (S) sont repérées sur un axe $(x'x)$ parallèle à la ligne de plus grande pente, orienté vers le haut. Soit $\vec{\imath}$ un vecteur unitaire sur cet axe. Les frottements seront considérés comme nuls.



1. Calculer l'angle α.
2. On déplace légèrement le solide S et on amène son centre de masse G_0 en G_1 tel que : $\overline{G_0G_1} = x_1\vec{\imath}$ avec $x_1 = +4{,}5cm$.

Et on l'abandonne sans vitesse initiale. A l'instant de date t, le centre de masse de S est en G situé entre $G_0 \circ G_1$, tel que $\overrightarrow{G_0G_1} = x\vec{\imath}$.

   a) Etablir l'équation différentielle du mouvement du solide S sur le plan incliné.

   b) Quelle est l'équation horaire du mouvement.

   c) Calculer la période propre T des oscillations.

Exercice 5

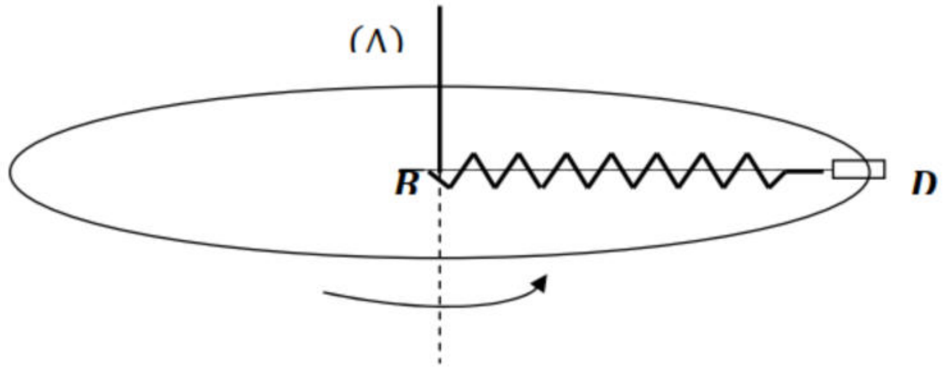
Dans tout le problème on prendra $g = 9{,}8m.s^{-2}$.

Un ressort vertical de masse négligeable et parfaitement élastique à une longueur à vide $l_0 = 20cm$; sous l'action d'un solide S de masse $M = 250mg$; sa longueur devient $L = 30cm$.

1.
   a) Faire l'inventaire de toutes les forces appliquées au solide en utilisant un schéma clair.

   b) Calculer la constante de raideur K de ce ressort.

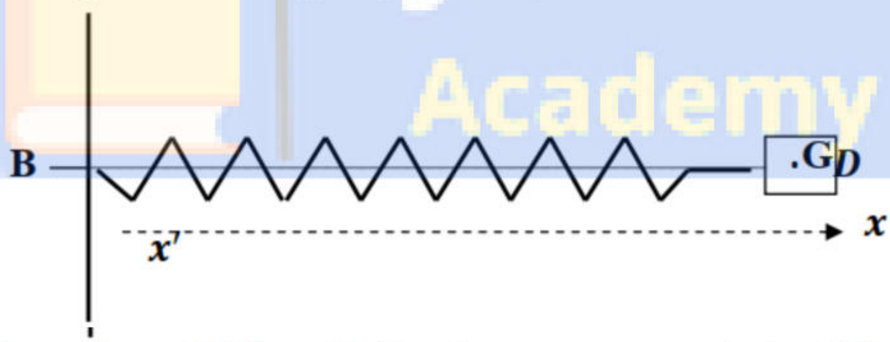
2. A un axe vertical (Δ), on soude en B une tige horizontale BD. En B est fixée une extrémité du ressort précédent ; l'autre extrémité est liée au solide (S) qui peut glisser sans frottement le long de BD. L'ensemble tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de (Δ).



a) Exprimer l'allongement x du ressort en fonction de ω.

b) Calculer l'allongement x pour $\omega = 5{,}5 rad.s^{-1}$.

3. On arrête la rotation de l'ensemble, par compression du ressort, le solide est déplacé de sa position d'équilibre A ; l'ensemble est alors lâché sans vitesse initiale. Le solide S passe en A à un instant $t = 0s$ pris comme origine des temps avec un vecteur vitesse de valeur algébrique négative telle que $|v_0| = 0{,}285 m.s^{-1}$.



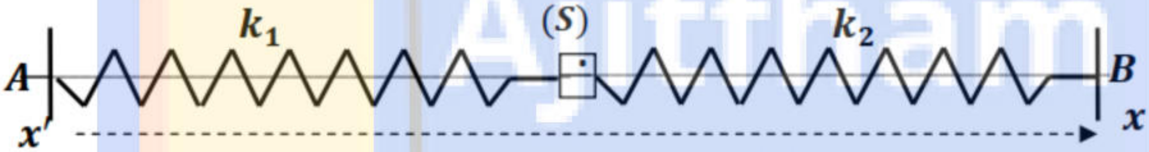
Etablir l'équation différentielle du mouvement de (S) et en déduire l'équation horaire de ce mouvement.

4. Exprimer à l'instant t, l'énergie mécanique E_M du système ressort-solide en fonction de k et de l'amplitude X_m du mouvement. On suppose que l'énergie potentielle en A est nulle.

5. Calculer pour $t = T_0/5$ avec T_0 la période propre du mouvement.
   a) L'élongation x du mouvement du solide (S) ;
   b) La vitesse v du solide (S) ;
   c) L'énergie mécanique du solide (S).

Exercice 6

Un système est constitué de deux ressorts idéaux de longueur à vide l_0, de constante de raideur $k_1 = k_0$ et $k_2 = 2k_0$ d'un solide (S) de dimensions négligeables et de masse m. Les deux ressorts sont tendus entre deux points A et B distants de d et soutiennent le solide (S).



Données : $k_0 = 10N.m^{-1}$; $l_0 = 15cm$; $d = 45cm$; $m = 0{,}3kg$; $k_1 = k_0$ et $k_2 = 2k_0$.

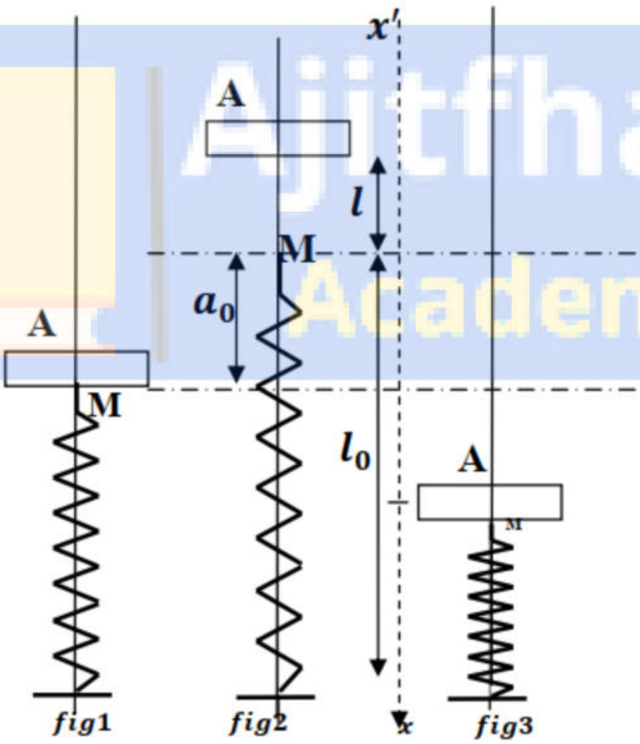
1. On néglige les frottements.
   a) Calculer l'allongement a_1 et a_2 des deux ressorts à l'équilibre.
   b) De la position d'équilibre prise comme origine des espaces, on déplace le solide vers B d'une distance $x_0 = 3cm$ et on le lâche à un instant pris comme origine des dates, sans vitesse initiale.
   – Etablir l'équation différentielle du mouvement du solide.
   – Calculer la pulsation propre ω_0 de cet oscillateur. Etablir l'équation horaire du mouvement du solide (S).

Exercice 7

Un solide A, de masse $m = 50g$, peut glisser sans frottement le long d'une tige verticale.

1. On commence par poser le solide en équilibre sur l'extrémité M du ressort de raideur $k = 20N.m^{-1}$ de masse négligeable et dont la longueur à vide est $l_0 = 15cm$. Ses spires sont non jointives. L'autre extrémité du ressort est fixée au bas de la tige.

2.



a) Exprimer le raccourcissement a_0 du ressort à l'équilibre en fonction de m, k et g.

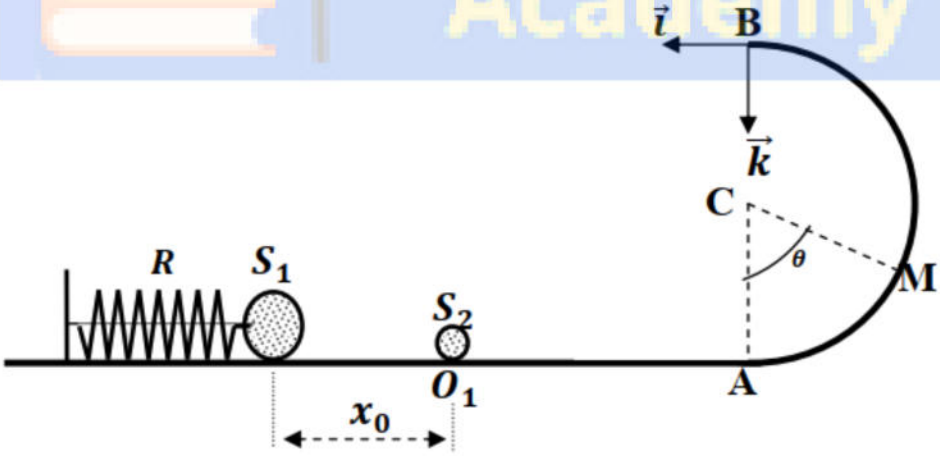
b) Calculer a_0.

3. Le solide est remonté en haut de la tige. On le lâche sans vitesse initiale. Après un parcours de longueur l, il vient heurter l'extrémité M du ressort. (figure 2).
   a) En utilisant la conservation de l'énergie mécanique du système (solide, ressort), montrer que le raccourcissement maximal a_m du ressort est tel que : $a_m = a_0\left[1+\sqrt{1+2\frac{l}{a_0}}\right]$.
   b) Calculer la longueur minimale du ressort pour $l = 10cm$.

4. On se propose d'étudier le mouvement de M lors de l'interaction solide-ressort après cette chute d'une longueur l. On repère la position de M par son abscisse x sur un axe Ox parallèle à la tige et à l'axe du ressort. On prend $x = 0$ pour la position d'équilibre définie au 1. (figure 3).
   a) Exprimer l'énergie mécanique du système en fonction de x et de $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ lors de l'interaction.
   b) En déduire l'équation différentielle du mouvement.
   c) Donner la solution $x(t)$ de cette équation, en prenant $t = 0$ au début de l'interaction. On prendra : comme niveau de référence des énergies potentielles, le plan horizontal passant par le point M, le ressort étant à vide. $g = 10N.kg^{-1}$.

Exercice 8

Dans tout l'exercice on négligera les forces de frottement et on prendra pour l'accélération de la pesanteur la valeur $g = 10m.s^{-2}$.
Une piste est située dans un plan vertical est constituée de deux parties. Une partie rectiligne (OA)et une partie circulaire (AB)de centre C et de rayon r.
On dispose d'un ressort R de constante de raideur k sur la partie rectiligne. L'une des extrémités du ressort est fixe, l'autre est reliée à un solide (S_1) de masse m_1. A l'équilibre (S_1) est au point O_1 tel que $O_1A = 2r$. On déplace S_1 d'une distance x_0 et on le lâche sans vitesse initiale. Une bille S_2 de masse $m_2 = m_1/2$ initialement au repos en O_1 est propulsée avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ lors du choc parfaitement élastique avec (S_1).



1.

a) Déterminer l'expression de la vitesse v de (S_1) juste avant le choc en fonction de k, m_1 et x_1.

b) Déterminer les expressions des vitesses v' de (S_1) et V_0 de (S_2) après le choc.

c) Exprimer la réaction de la piste sur (S_2) en un point M en fonction de m_2, r, v_0, g et θ : angle (ACM). On exprimera d'abord la vitesse de (S_2) en M.

d) En déduire en fonction g et r, la valeur minimale de v_0, puis en fonction de g, r, k et m_1, la valeur minimale de x_0 pour que (S_2) puisse atteidre le point B, sommet de sa trajectoire.

e) Quelle est dans cette condition, en fonction de g et r la vitesse v_B de (S_2) en B ?

2.

a) Etudier dans le repère $(B, \vec{\imath}, \vec{k})$, le mouvement ultérieur de la bille (S_2).

b) La bille (S_2) retombe sur la piste en un point D. Déterminer en fonction de r, la distance $d = AD$. Conclure.

3. A l'arrivée de (S_2) en D, elle heurte de nouveau (S_1) passant par D dans le sens du vecteur $\vec{\imath}$, pour la deuxième fois.

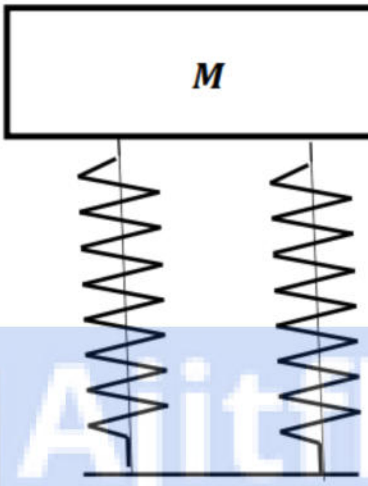
a) Déterminer l'intervalle de temps t, qui sépare les deux chocs. Application numérique : $k = 10N.m^{-1}$; $m_1 = 100g$; $r = 20cm$.

b) En déduire le temps t_2, mis par (S_2) pour parcourir la piste AB.

Reprendre les questions 1. a), b), c), d) et e). dans le cas où il existe sur la partie (AB) des forces de frottement équivalentes à une force unique f proportionnelle au poids de (S_2) : $f = \lambda m_2 g$.

Exercice 9

La remorque d'un véhicule au repos peut être assimilée au dispositif suivant : une masse $M = 500kg$ reposant par l'intermédiaire de deux ressorts identiques de raideurs k sur une barre B représentant l'axe des roues de la remorque.



1. En admettant que sous l'action de la masse M, les deux ressorts verticaux sont comprimés de $\Delta l = 15cm$, quelle est la raideur de chaque ressort ?
2. Lorsqu'on charge la remorque cela revient à augmenter M de $m = 50kg$. Chaque ressort est alors comprimé d'une même quantité supplémentaire x_0.

   a) Calculer x_0.

   b) A la date $t = 0$, la charge m est enlevée. Etablir l'équation différentielle du mouvement de translation de la masse M en prenant un axe $(x'x)$ orienté vers le bas. Calculer la période propre T_0 des oscillations. L'origine O sur l'axe $(x'x)$ sera à la position d'équilibre correspondant à la question 1.

3. On installe deux "amortisseurs" fluides qui exercent chacun une force opposée au déplacement de la forme $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ ($\vec{v}$ vitesse lors des oscillations verticales de la remorque).

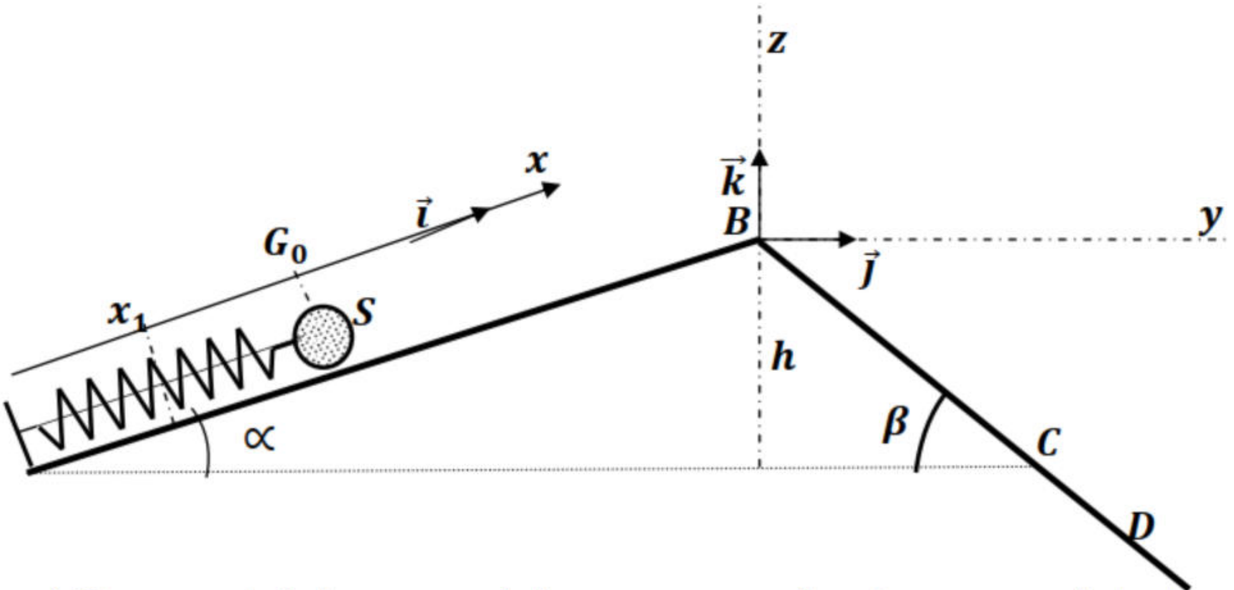
a) Etablir l'équation différentielle du mouvement de translation de la masse M quand la surcharge m est retirée.

b) Vérifier qu'un tel mouvement vertical oscillatoire amorti de la forme $x = x_m e^{-\delta t} cos(\omega t + \varphi)$ satisfait l'équation différentielle. Pour cela, quelles devront être les valeurs de δ et ω en fonction de k, M et λ ?

c) Déterminer alors la limite de λ, notée $\lambda_{critique}$ ($\omega = 0$), permettant d'avoir juste le mouvement apériodique critique. Faire l'application numérique.

Exercice 10

Le schéma ci – dessous représenté est celui du lancement de projectiles. La résistance de l'air et les frottements sur le plan incliné sont négligeables. Le ressort parfaitement élastique est à spires non jointives et de raideur k. Le solide S de masse $m = 250g$ est au repos en G_0 qui est l'origine des abscisses ; le ressort est alors comprimé de $|\Delta l_0| = 2cm$.



1. a) Pourquoi doit – on préciser « ressort à spires non – jointives » ?

   b) En étudiant l'équilibre du solide S, montrer que la raideur $k = 62{,}5 N.m^{-1}$. On donne $\propto = 30°$; $\beta = 45°$; $g = 10 N.kg^{-1}$

2. On écarte le solide S de sa position d'équilibre en l'amenant en G_1 d'abscisse $x_1 = -5cm$ puis on le lâche sans vitesse initiale à la date $t = 0$.

   a) Par une étude dynamique, déterminer la nature du mouvement du centre d'inertie G de S.

   b) Etablir l'équation horaire du mouvement de G.

   c) Calculer l'énergie mécanique du pendule élastique. Retrouver l'équation différentielle du mouvement de G par une étude énergétique.

3. A l'instant où le solide S passe pour la première fois par sa position d'équilibre, il heurte un autre solide S' de masse $m' = 50g$ initialement en G_0. Il se produit alors un choc élastique au cours duquel les vecteurs vitesses juste avant et après le choc sont tous colinéaires (choc de plein fouet).

a) Calculer la vitesse de S juste avant le choc.

b) Calculer les vitesses V et V' de S et de S' juste après le choc.

4. S' quitte le plan incliné au sommet B ($G_0B = 10cm$)

a) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à S', entre G_0 et B, montrer que la vitesse S' en B est : $V_B \approx 0{,}86 m.s^{-1}$.

b) Montrer que le vecteur position du solide S' supposé ponctuel est : $\overrightarrow{BS'} = (V_B t \cos \propto)\vec{j} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + V_B t \sin \propto\right)\vec{k}$ dans le repère indiqué, avec B comme origine du repère ; l'origine des instants est prise à l'instant du passage de S' par B.

c) Le solide S' reprend contact avec le plan BC en D. Calculer BD.