

Oscillations forcées dans un circuit RLC série

I) Le régime alternatif sinusoïdal

1) La tension alternative sinusoïdale

La tension alternative sinusoïdale est une fonction du temps, qui s'écrit sous la forme suivante :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

U_m : L'amplitude de $u(t)$ en volts (V) ;

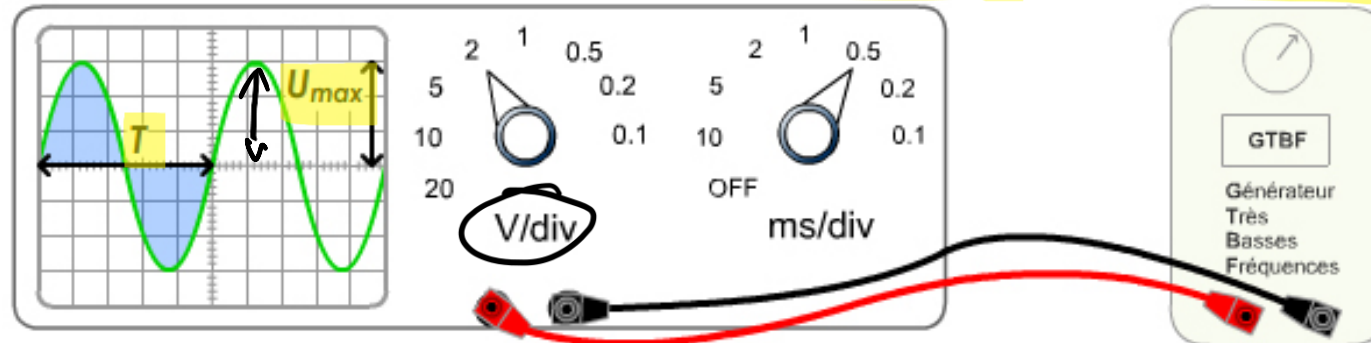
ω : La pulsation de $u(t)$ en (rad.s^{-1}) avec $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$;

$(\omega t + \varphi_u)$: La phase de $u(t)$ à l'instant t en (rad) ; ($t > 0$)

φ_u : La phase de la tension à l'origine des temps en ($t=0$).

La tension efficace U d'une tension alternative sinusoïdale est donnée par la relation suivante : $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$

Remarque : Le voltmètre indique la valeur efficace de la tension et l'oscilloscope indique la tension maximale.



$$U_{max} = 3 \text{ div} \times 2 \text{ V/div}$$

$$U_{max} = 6 \text{ V}$$

$$U = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

2) Intensité du courant alternatif sinusoïdal :

L'intensité du courant alternatif sinusoïdal est une fonction du temps qui s'écrit sous la forme suivante :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

I_m : L'amplitude ou l'intensité maximale du courant en ampère (A) ;

ω : La pulsation du courant en (rad.s⁻¹) avec $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$;

$(\omega t + \varphi_i)$: La phase de $i(t)$ à l'instant t en (rad) ;

φ_i : La phase de l'intensité à l'origine des temps ($t=0$).

L'intensité efficace I d'un courant alternatif sinusoïdal est donnée par la relation suivante : $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

Remarque : L'ampèremètre indique la valeur efficace d'intensité.

Rq 2 : on ne peut visualiser l'évolution de $i(t)$ par l'oscilloscope
de manière directe.

Il faut visualiser la tension $u_R(t)$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{u_R(t)}{R}$$

3) Notion de la phase

On considère deux grandeurs alternatives sinusoïdales :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \quad \text{et} \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

On appelle **la phase** de la tension $u(t)$ par rapport à l'intensité $i(t)$: $\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i$ (mesure l'avance et le retard de la tension $u(t)$ par rapport à l'intensité $i(t)$)

pour simplifier l'étude on prend $\varphi_i = 0$ donc $\varphi_{u/i} = \varphi_u$

$$u(t) = U_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \quad \Leftrightarrow \quad u(t) = U_m \cos\left(\omega\left(t + \frac{\varphi_u}{\omega}\right)\right)$$

$$\left\{ \frac{\varphi_u}{\omega} \text{ en } \frac{\text{rad}}{\text{rad s}^{-1}} = \text{s} \right\}$$

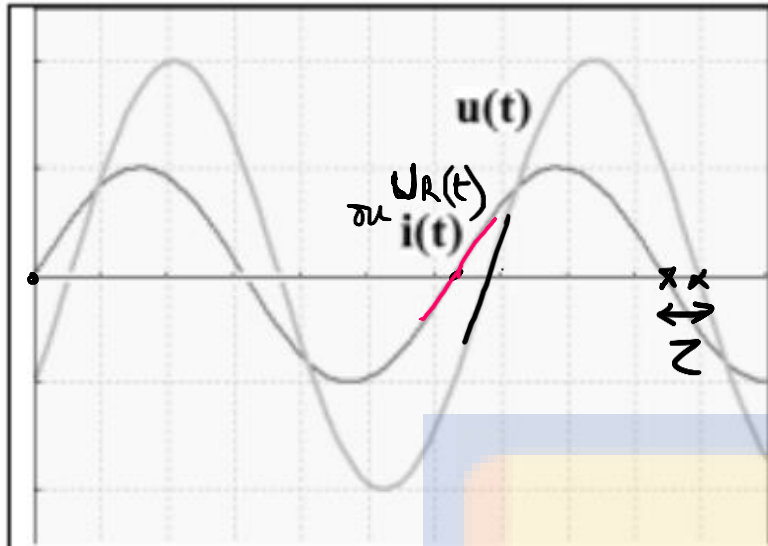
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ rad/s}$$

on note $\frac{\varphi_u}{\omega} = \tau$ le retard de $i(t)$ par rapport $u(t)$ donc $\varphi_u = \tau \cdot \omega$

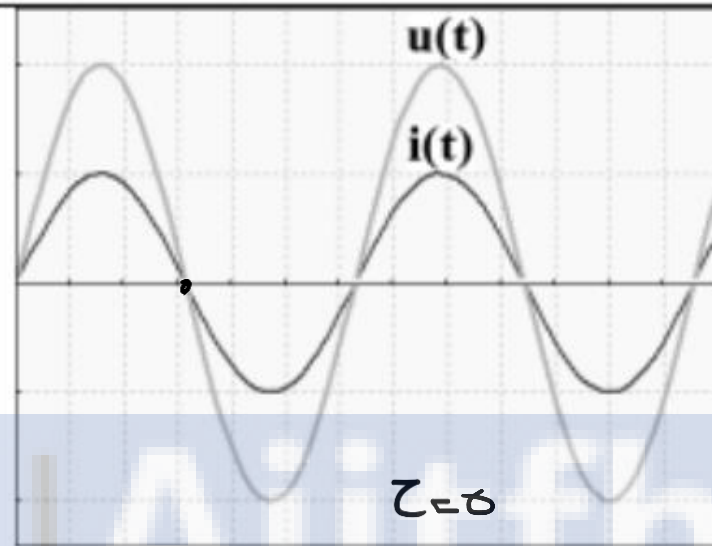
donc

$$\varphi_u = \frac{2\pi\tau}{T}$$

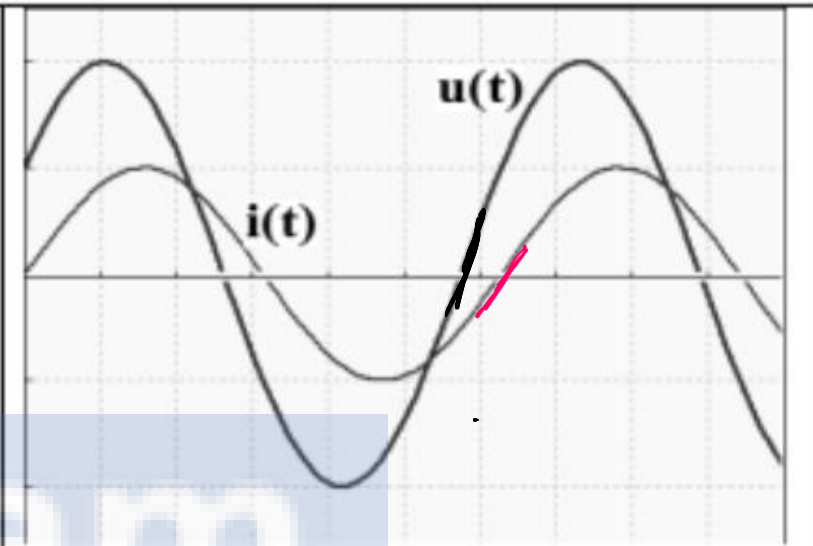
Pratiquement la mesure de τ par l'oscilloscope nous permet de déterminer la valeur absolue de $\varphi_{u/i}$.



$\varphi_{u/i} < 0$: $u(t)$ est en retard sur $i(t)$
ou $i(t)$ est en avance sur $u(t)$



$\varphi_{u/i} = 0$: $u(t)$ et $i(t)$ sont en phase



$\varphi_{u/i} > 0$: $u(t)$ est en avance sur $i(t)$
 $i(t)$ est en retard sur $u(t)$

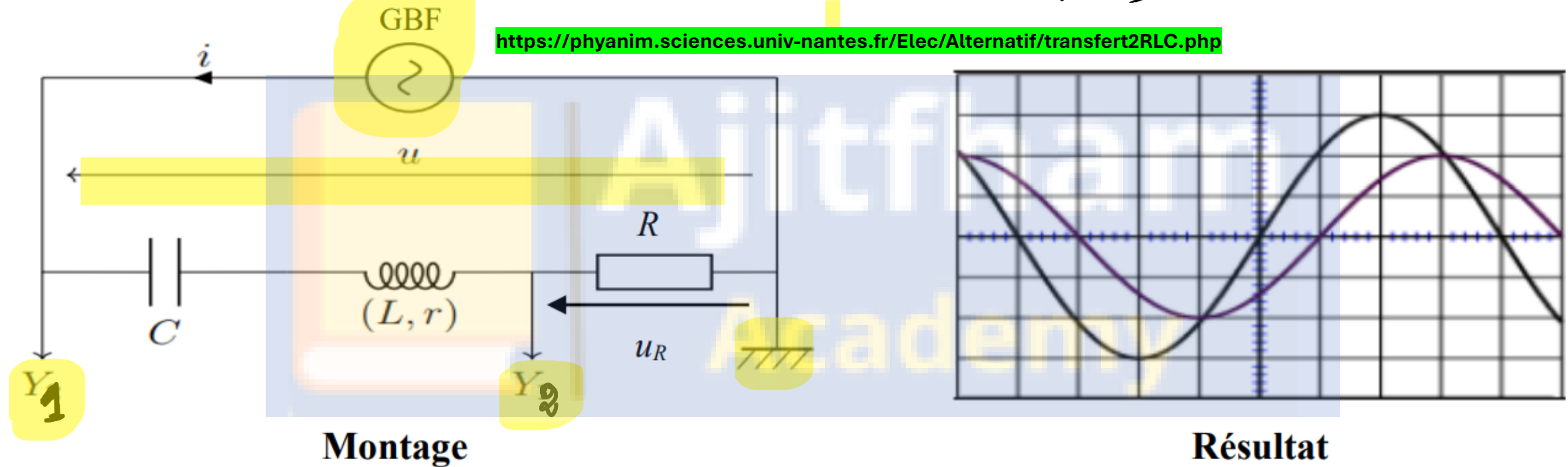
La courbe en avance est celle qui coupe l'axe de temps avant l'autre

u en avance	$\varphi_{u/i} > 0$
u en retard	$\varphi_{u/i} < 0$
u et i en phase	$\varphi_{u/i} = 0$

II) Etude expérimentale du circuit RLC série en régime alternatif sinusoïdal

1) Oscillations forcées dans un circuit RLC

On alimente le circuit RLC série avec un générateur basse fréquence (GBF) délivrant une tension sinusoïdale $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ et on visualise les tensions $u_R(t)$ sur la voie Y_2 et $u(t)$ sur la voie Y_1 d'un oscilloscope.



En faisant varier la fréquence du GBF, on remarque, en utilisant les oscillogrammes, que les deux tensions $u(t)$ et $u_R(t)$ ont la même période (même fréquence), on dit que les oscillations de la tension $u_R(t)$ sont imposées par le générateur, l'oscillateur n'est pas libre et les oscillations sont dites forcées.

Conclusion

- La fréquence des oscillations est imposée par le générateur : on dit que les oscillations sont forcées.
- Le générateur joue le rôle de l'excitateur.
- Le dipôle RLC en série joue le rôle du résonateur.
- L'excitateur fournit de l'énergie au résonateur pour compenser l'énergie perdue par effet Joule.

1. "La fréquence des oscillations est imposée par le générateur : on dit que les oscillations sont forcées."

- Les oscillations forcées signifient que le ^{RLC} système oscille à la fréquence du générateur, indépendamment de la fréquence propre du système (circuit RLC). Cela se produit car l'énergie fournie par le générateur domine, et impose sa propre fréquence d'oscillation.

3. "Le dipôle RLC en série joue le rôle du résonateur."

- Le circuit RLC (composé d'une résistance R , d'une inductance L , et d'un condensateur C) fonctionne comme un résonateur. Il est capable de stocker de l'énergie sous forme de champ électrique et magnétique et de la libérer périodiquement, ce qui produit des oscillations. Lorsque la fréquence du générateur est proche de la fréquence propre du circuit, on observe une résonance.

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

2. "Le générateur joue le rôle de l'excitateur."

- Ici, le générateur agit comme une source d'énergie externe qui alimente le circuit. Il fournit une tension ou un courant alternatif à une fréquence spécifique, excitant ainsi le circuit pour qu'il oscille.

4. "L'excitateur fournit de l'énergie au résonateur pour compenser l'énergie perdue par effet Joule."

- L'effet Joule représente les pertes d'énergie dues à la résistance R dans le circuit. L'énergie dissipée sous forme de chaleur doit être compensée pour maintenir les oscillations. Le générateur (excitateur) fournit cette énergie pour que le système reste en régime d'oscillations forcées. (périodique).

2) Notion d'impédance

L'impédance d'un dipôle est égale au quotient de la valeur efficace de la tension à ses bornes par la valeur efficace de l'intensité : $Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m}$

L'impédance dépend de la fréquence du circuit.

L'unité de l'impédance dans le système internationale est Ω .

Remarque : Théoriquement l'expression de l'impédance d'un circuit RLC à la fréquence f est :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L2\pi f - \frac{1}{C2\pi f}\right)^2}$$
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

hors programme

$$Z_L = L\omega$$

$$Z_C = -\frac{1}{C\omega}$$

- **Résistance :** Opposition fixe au passage du courant, quelle que soit la fréquence. Elle concerne uniquement les résistances et dissipe l'énergie sous forme de chaleur.
- **Impédance :** Opposition au passage du courant dans un circuit, prenant en compte les résistances, les bobines et les condensateurs. Elle dépend de la fréquence du courant en présence de bobines ou condensateurs.

Résumé clé : La résistance est un cas particulier de l'impédance qui ne varie pas avec la fréquence.

III) Phénomène de résonance d'intensité

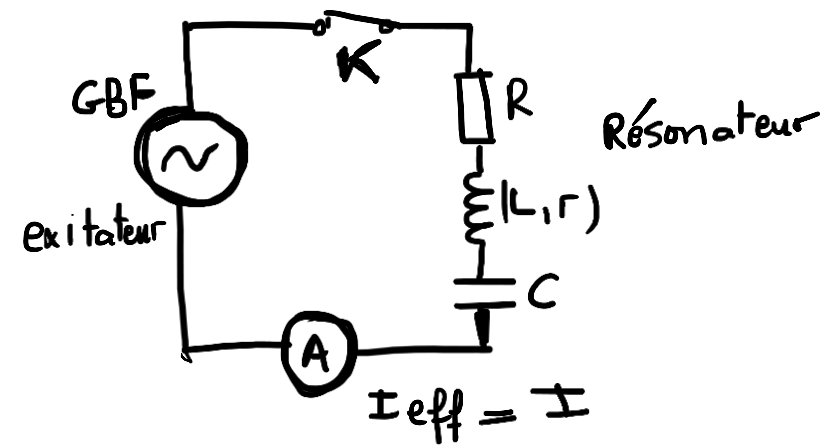
1) Phénomène de résonance

Lorsque la fréquence f d'excitateur prend une valeur égale à la fréquence propre f_0 du résonateur, l'intensité efficace I du courant qui traverse le circuit sera maximale et égale à I_0 , on dit dans ce cas que le circuit RLC série est en résonance.

Donc : $f = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

↓ ↓
GBF RLC

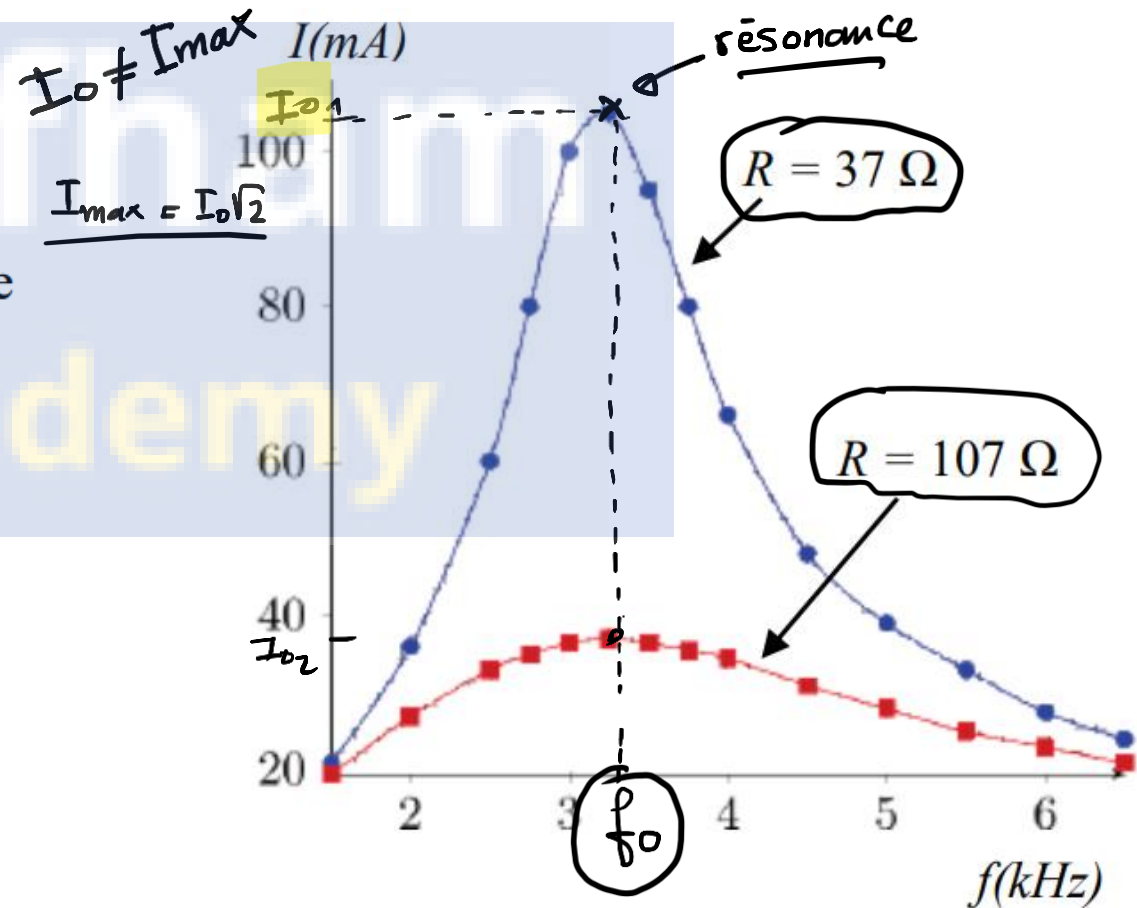
$$f(\text{Excitateur}) = f(\text{résonateur})$$
$$\varphi(\text{GBF}) = \varphi(\text{RLC})$$



2) L'impédance du circuit RLC à la résonance

- A la résonance, l'intensité efficace I du courant qui traverse le circuit sera maximale alors l'impédance passe par la valeur minimale.

- A la résonance, l'impédance du circuit RLC est égale à la résistance globale du circuit : $Z = R$



Remarque

- A la résonance, le circuit RLC se comporte comme un conducteur ohmique de résistance R .
- A la résonance la tension aux bornes du condensateur est égale à la tension aux bornes de la bobine :

$$U_L = U_C \text{ donc } L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \Leftrightarrow L \cdot 2\pi f_0 = \frac{1}{C \cdot 2\pi f_0}$$

3) La phase à la résonance

A la résonance l'intensité $i(t)$ et la tension $u(t)$ sont en phase :

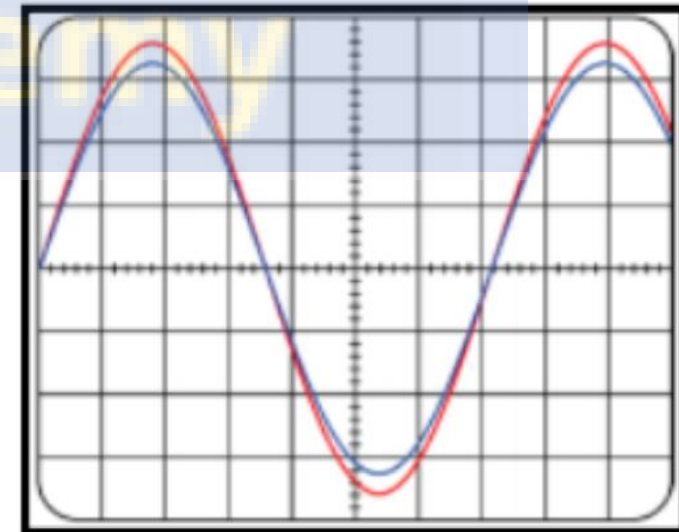
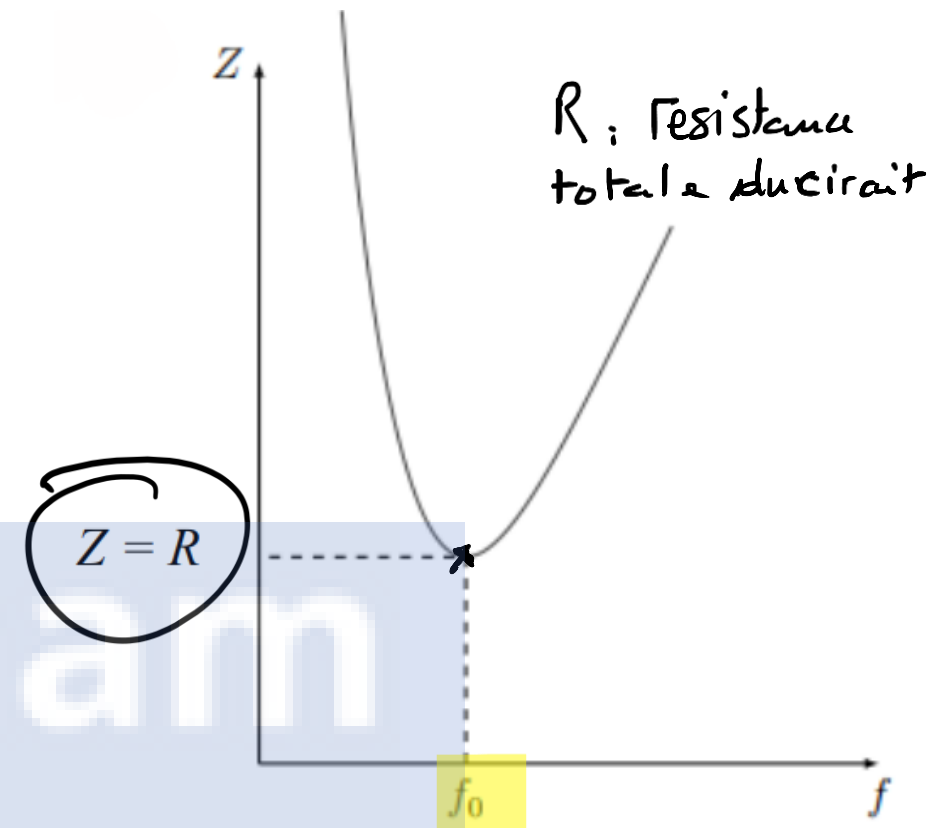
$$\varphi_{u/i} = 0$$

Remarque :

D'après la courbe de la résonance d'intensité et l'étude expérimentale si :

$f < f_0$ on a $i(t)$ en avance de phase sur $u(t)$ on dit que le circuit est capacitif.

$f > f_0$ on a $u(t)$ en avance de phase sur $i(t)$ on dit que le circuit est inductif.

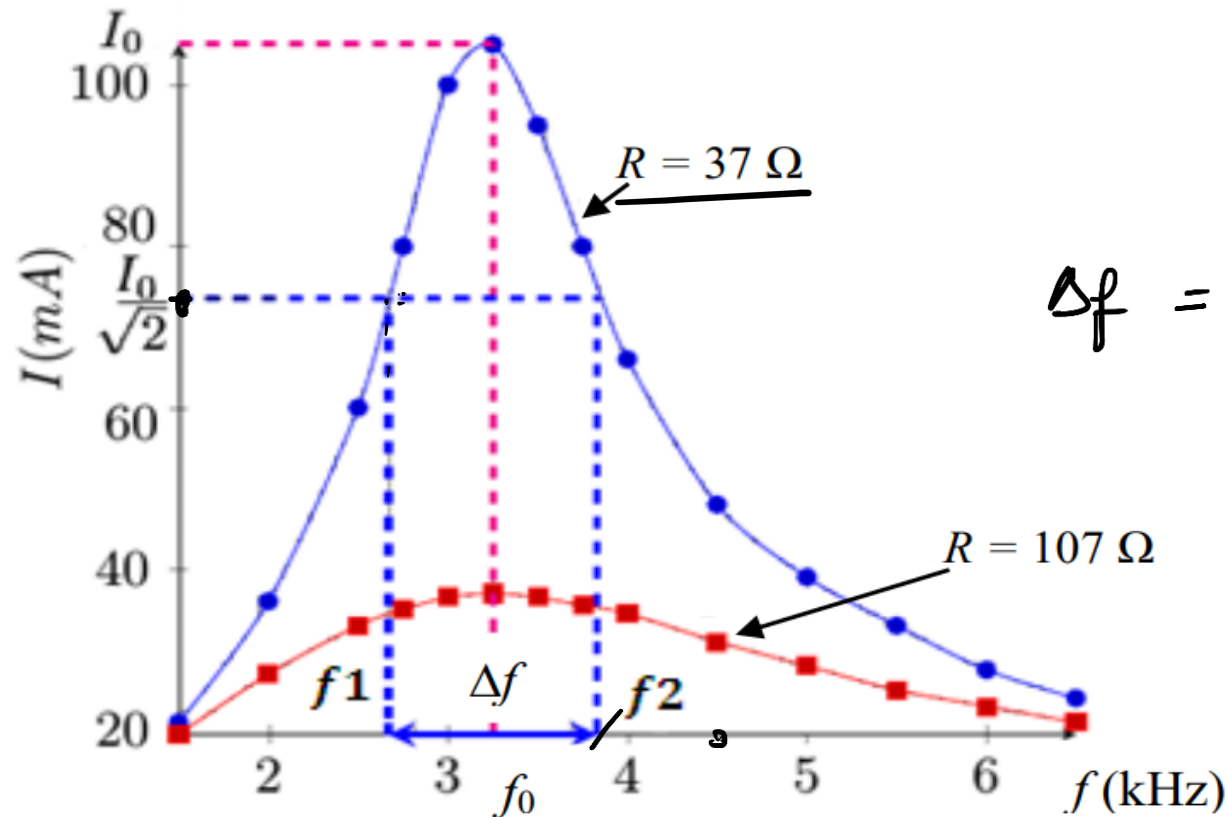


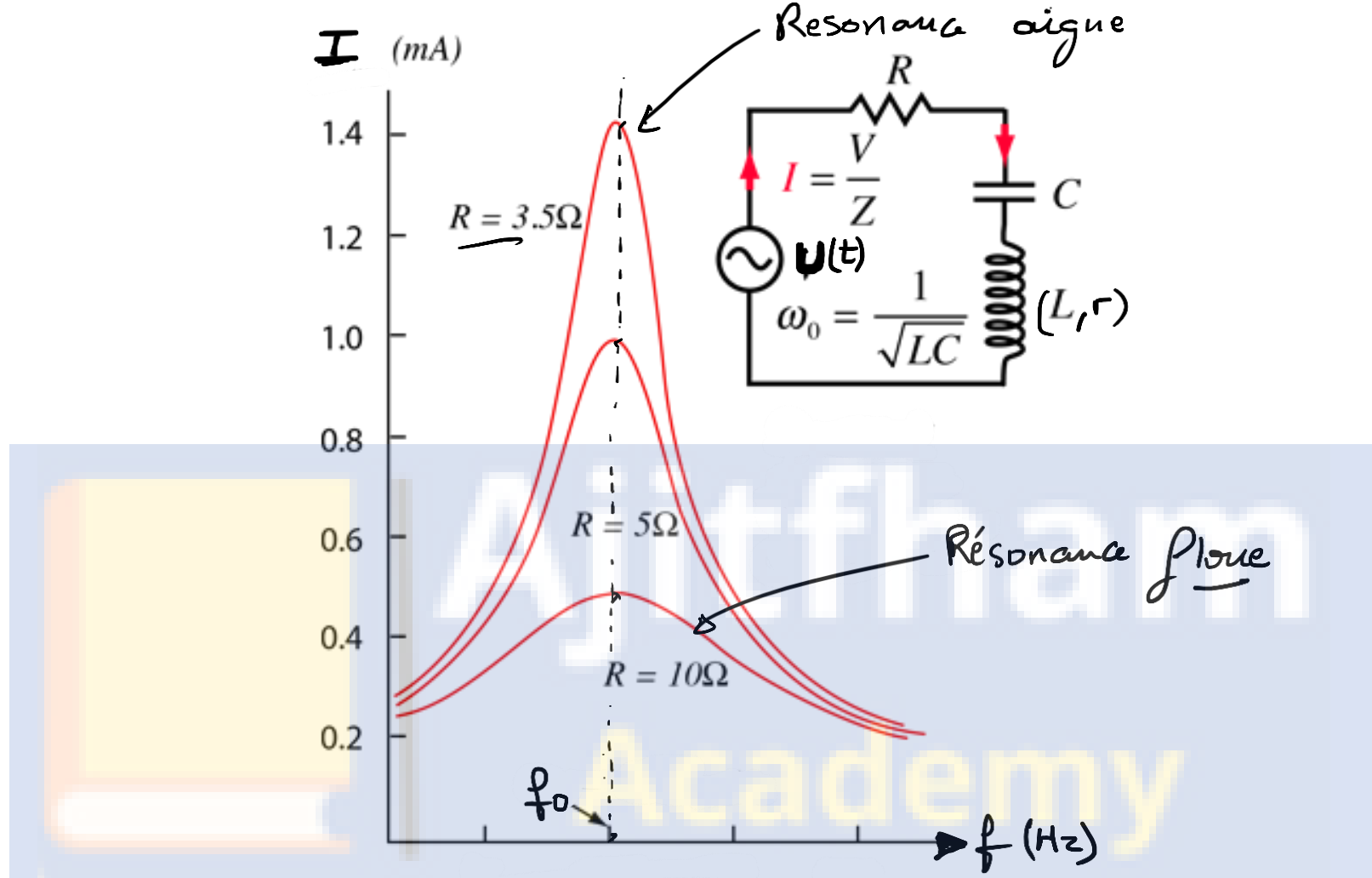
4) La bande passante à -3db du circuit RLC

a) Définition

La bande passante à -3db du circuit RLC est définie comme un **intervalle** continu des fréquences $[f_1, f_2]$ du générateur, pour laquelle l'intensité efficace I du courant vérifie la relation suivante : $I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ où I_0 est l'intensité maximale efficace du courant à la résonance.

b) La largeur de bande passante -3db :





On conclue que :

- Dans le cas où R est petite (amortissement faible), la résonance est aigüe et la largeur de la bande passante Δf est petite.
- Dans le cas où R est grande (amortissement forte), la résonance est floue et Δf est grande.

Remarque

Théoriquement l'expression de la bande passante -3db est donné par la relation :

$$\begin{cases} \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \\ \Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L} \end{cases}$$

hors programme (BAC)

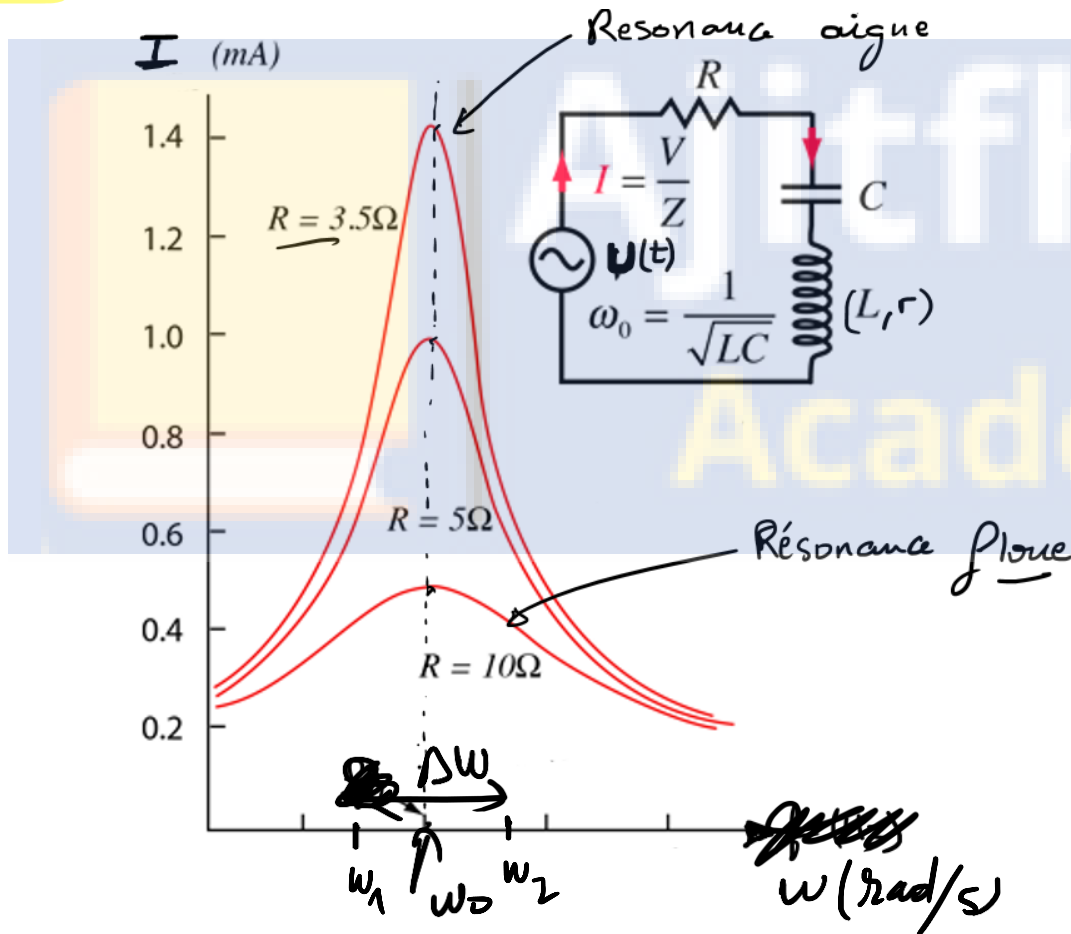
$$\omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

$$\Delta\omega = 2\pi \cdot \Delta f$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$



5) Facteur de qualité

On définit le facteur de qualité Q par un nombre sans dimension : $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ ou $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$

Avec ω_0 et f_0 sont respectivement la pulsation propre et la fréquence propre. $\Delta\omega$ ou Δf la largeur de la bande passante.

- Puisque $\Delta\omega = \frac{R}{L}$ alors le facteur de qualité Q sera : $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{L \cdot 2\pi f_0}{R}$

- A la résonance : $L \cdot 2\pi f_0 = \frac{1}{C \cdot 2\pi f_0}$ alors le facteur de qualité Q sera : $Q = \frac{1}{R \cdot C \cdot 2\pi f_0} = \frac{1}{R \cdot C \cdot \omega_0}$

- La fréquence propre $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ alors le facteur de qualité Q sera : $Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$

Remarque

A la résonance, le circuit RLC se comporte comme un conducteur ohmique de résistance R , donc la tension efficace : $U = R \cdot I_0$ *I_0 : l'intensité efficace maximale.*

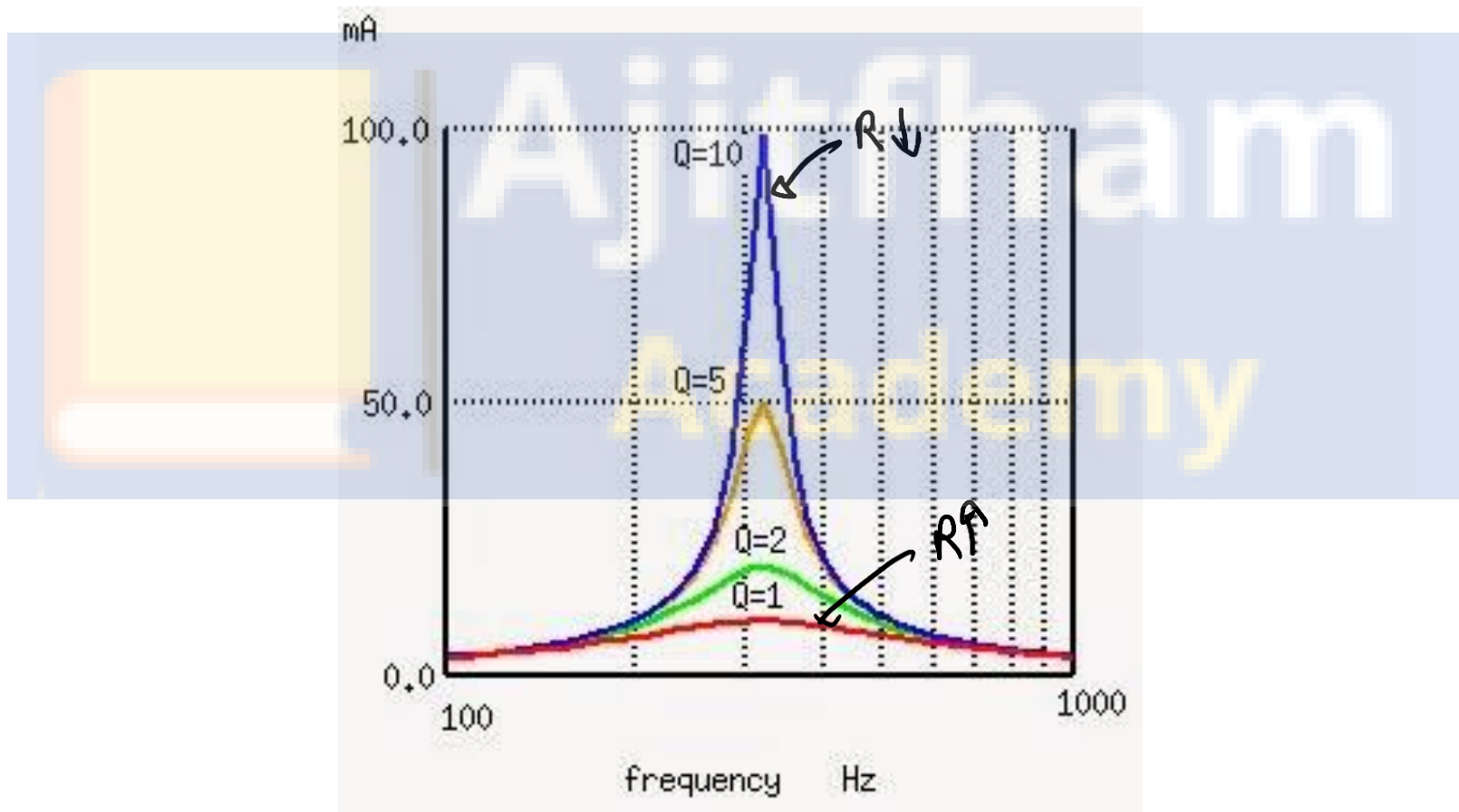
$$Q = \frac{L\omega_0}{R} \cdot \frac{I_0}{I_0} = \frac{1}{R \cdot C \cdot \omega_0} \cdot \frac{I_0}{I_0} = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U}$$

On appelle le facteur de qualité : le facteur de surtension car : $U_L = Q \cdot U$

Quelques effets de la résonance sur le circuit

Le facteur de qualité Q est inversement proportionnel à la largeur de la bande passante et qui caractérise l'acuité de la résonance.

- Si Q est grand alors le circuit est plus sélectif.
- Si la résonance est aiguë alors la valeur de Q est grande.
- Si la résonance est floue alors le circuit est amorti.



IV) La puissance en régime alternatif sinusoïdal

1) La puissance instantanée

On considère un dipôle AB traversant un courant alternatif sinusoïdal : $i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t)$ et la tension à ses bornes $u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$. $\varphi = \varphi_{u/i}$ car $\varphi_i = 0$

En convention récepteur, la puissance instantanée reçue par un dipôle s'écrit : $P(t) = u(t) \cdot i(t)$

$$P(t) = u(t) \cdot i(t)$$

$$= U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) \cdot I\sqrt{2} \cos(\omega t)$$

$$P(t) = 2UI \cos(\omega t + \varphi) \cdot \cos(\omega t)$$

Rappel Math : $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

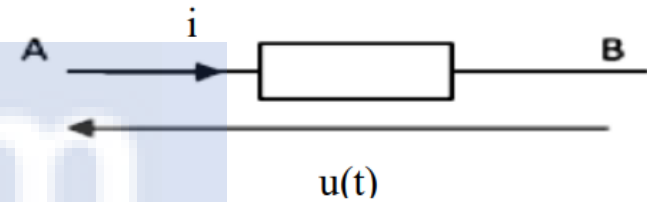
donc $P(t) = 2UI \times \frac{1}{2} [\cos(\omega t + \varphi + \omega t) + \cos(\omega t + \varphi - \omega t)]$

$$P(t) = UI [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi]$$

donc

$$P(t) = U \cdot I \cdot [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)]$$

↖ L'expression de la puissance instantanée.



$p(t)$ est en fct sinusoidale de pulsation 2ω et periode $\frac{T}{2}$

donc

$$2\omega = 2\pi \frac{2\pi}{T}$$

$\xrightarrow{2\pi}$

$$2\omega = \frac{2\pi}{\frac{T}{2}} \leftarrow \text{periode}$$



2) La puissance moyenne ou puissance active

La puissance moyenne est la somme des puissances instantanées consommées par un dipôle durant la période T.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) \cdot dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T UI (\cos \varphi + \cos (2\omega t + \varphi)) dt$$

$$= \frac{1}{T} UI \int_0^T (\cos \varphi + \cos (2\omega t + \varphi)) dt$$

$$= \frac{1}{T} UI \int_0^T (\cos \varphi) dt + \frac{1}{T} UI \int_0^T \cos (2\omega t + \varphi) dt$$

$$= \frac{1}{T} UI \cdot \cos \varphi \cdot \int_0^T 1 dt + \frac{1}{T} UI \int_0^T \cos (2\omega t + \varphi) dt$$

$$= \frac{1}{T} UI \cos \varphi [t]_0^T + \frac{1}{T} UI \times \frac{1}{2\omega} [\sin (2\omega t + \varphi)]_0^T$$

$$= \frac{1}{T} UI \cos \varphi \left[t \right]_0^T + \frac{1}{T} UI \times \frac{1}{2\omega} \left[\sin(2\omega t + \varphi) \right]_0^T$$

$$= \frac{UI \cos \varphi}{T} (\cancel{T} - 0) + \frac{UI}{T \times 2\omega} \left(\sin(2\omega T + \varphi) - \sin(\cancel{2\omega 0} + \varphi) \right)$$

$$= UI \cos \varphi + \frac{UI}{T \times \frac{2 \times 2\pi}{T}} \left(\sin\left(2 \times \frac{2\pi}{T} \times \cancel{T} + \varphi\right) - \sin \varphi \right)$$

$$= UI \cos \varphi + \frac{UI}{4\pi} \left(\sin(4\pi + \varphi) - \sin \varphi \right)$$

puisque $\sin(2k\pi + \varphi) = \sin \varphi$

$$= UI \cos \varphi + \frac{UI}{\cancel{4\pi}} \cdot (\cancel{\sin \varphi} - \sin \varphi)$$

0

$$P = U \times I \times \cos \varphi$$

à retenir
La puissance moyenne.

Alors la puissance moyenne a pour expression : $P = U.I.\cos \varphi$

- Le produit $U.I$ des amplitudes efficaces désigne la puissance apparente S du dipôle : $S = U.I$

- Le $\cos \varphi$ correspond au facteur de puissance.

on a : $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$ (à retenir)

on a : $U = Z.I$

Alors

$$P = \cancel{Z}.I.I.\frac{R}{\cancel{Z}}$$

$$P = R.I^2$$

Dans un circuit RLC série la puissance électrique moyenne ne se consomme que par la résistance globale R par effet joule et elle est donnée par la relation suivante : $P = R.I^2$