ZAKARIA Bouicha
WtSp:0617074062

# Les suites numériques.

1 bac SM

Ajitfham Academy
zakaria bouicha

## EX1 :

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 3}{3u_n - 1}$

1) Démontrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n \neq 1$

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1}$.

a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique. Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.

c) Calculer en fonction de $n$ la somme :

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n$$

## EX2

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par :

$u_0 = -\dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$

1) Démontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n < 0$.

2) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)$.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$.

a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.

c) Calculer en fonction de $n$ la somme :

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$$

## EX3 :

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \dfrac{1}{2}u_{n+1} + \dfrac{1}{2}u_n \ ;\ (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1) a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

b) Écrire $v_n$ en fonction de $n$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ S_n = u_n$.

b) Écrire $u_n$ en fonction de $n$.

## Ex4 :

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par :

$u_0 = \dfrac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 1$.

2) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)$.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{2}(u_n - 1)$.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n - 1 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

4) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ n < \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq n + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

# Ex 5

Soit $(x_n)$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Soit $\varphi$ la solution positive de l'équation : $x = 1 + \dfrac{1}{x}$.

($\varphi$ est le nombre d'or).

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ x_n \geq 1$ .

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $x_n - \varphi = \dfrac{\varphi - x_{n-1}}{\varphi . x_{n-1}}$.

3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$|x_n - \varphi| \leq \frac{|\varphi - x_{n-1}|}{\varphi}$$

4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $|x_n - \varphi| \leq \dfrac{1}{\varphi^n}$

puis que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |x_n - \varphi| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

# Ex 6

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

1) Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

2) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

3) Montrer que pour tout entier $p \geq 2$ :

$$\frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \geq \frac{1}{2p\sqrt{p}}$$

4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $1 \leq u_n \leq 3 - \dfrac{2}{n}$.

# Ex 7 :

1) Montrer que pour tout $x \in ]0;1]$ :

$$\sqrt{1-x} < 1 - \frac{1}{2}x < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

2) On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = \left(1 - \dfrac{1}{2n}\right) u_{n-1} \ ; \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = u_n.\sqrt{n+1} \quad \text{et} \quad w_n = u_n.\sqrt{n}$$

a) Montrer que la suite $(v_n)$ est strictement décroissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $u_n < \dfrac{1}{2\sqrt{1+n}}$.

b) Montrer que la suite $(v_n)$ est strictement croissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\dfrac{1}{4\sqrt{n}} \leq u_n$.

# Ex 8 :

1) Soit $x$ un nombre réel.

Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{Z})\ E(x+a) = E(x) + a$

où $E(x)$ désigne la partie entière de $x$.

2) Soit $x$ un réel de l'intervalle $]1;+\infty[$.

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par:

$$\begin{cases} u_1 = E(x) \\ u_{n+1} = u_n + E(u_n) \ ; \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Calculer $u_2$ et $u_3$.

b) Calculer $E(u_n)$ en fonction de $n$.

c) Déterminer l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

## Ex 9 :

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [0;1] \\ u_{n+1} = 2 + u_n - \sqrt{3+u_n^2} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 \leq u_n \leq 1$

2) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)$.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \left(\sqrt{3}-1\right)\left(1-u_n\right)$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$0 \leq 1 - u_n \leq \left(\sqrt{3}-1\right)^n \left(1-u_0\right)$$

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{3+u_k^2} \quad \text{et} \quad T_n = u_n + S_n$$

a) Déterminer la nature de la suite $(T_n)_{n\geq 1}$.

b) Exprimer $S_n$ en fonction de $n$, $u_0$ et $u_n$.

## Ex 10

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par :

$$u_0 = -1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} :\ u_{n+1} = \frac{4+u_n}{5-u_n}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $v_n = \dfrac{1+u_n}{2-u_n}$.

1) Montrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique.

2) On considère la suite numérique $(w_n)$ définie par :

$$w_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} : w_{n+1} = \left(u_n + \frac{5}{n+1}\right) w_n .$$

et on pose : $X_n = \dfrac{w_n}{n+1}$ et $S_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$

a) Montrer que la suite $(X_n)$ est géométrique.

b) Montrer que : $S_n = (n+1)X_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis exprimer $S_n$ en fonction de $n$.