Exam blanc 1

Exercice 1: (4 Pts)

Soit la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 2$
$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ pour tout n de IN
1. Montrer que:
$\forall n \in IN : u_n > 1$.
2. a. Montrer que:
$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n-1)^2}{u_n}$
puis déduire la monotonie de la suite (u_n).
b. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. Pour tout n de N on pose : $v_n = \frac{u_n-2}{u_n-1}$.
a. Calculer v_0 puis montrer que :
$v_{n+1} - v_n = -1$ pour tout n de IN.
b. Montrer que pour tout n de IN, on a : $v_n = -n$.
c. Déduire que pour tout n de IN, on a :
$u_n = \frac{n+2}{n+1}$.
Calculer lim $_{n\to+\infty} u_n$.
4. Déterminer lim $_{n\to+\infty} w_n$
tel que (w_n) est la suite définie par: $w_n = \ln(u_n)$.

Exercice 2: (5 Pts)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$(E) : Z^2 - \sqrt{2}Z + 1 = 0.$
2. On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$
les points A : B et C d'affixes respectives:
$a = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad : b = \sqrt{2} + 1 + i; c = \bar{b}.$
a. Montrer que:
$\arg(a) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.
Soit R la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{4}$
et B l'image de C par la rotation R.
b. Montrer que: $b = ac$.
c. Déduire que : $\arg(b) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$
et montrer que : $|b| = \sqrt{2(\sqrt{2}+2)}$.
d. En déduire que : $b^4 = 4(\sqrt{2}+2)^2$ i.
3. On considère le point D d'affixe: $d = \sqrt{2}$.
a. Vérifier que : $b - d = i(c - d)$.
b. Déduire que: $DB = DC$
puis determiner la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DB}})$.
c. Déduire la nature du triangle BDC.

Exercice 3: (4,5 Pts)

On considère la fonction g definie sur IR par:

$g(x) = 1 - e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}x.$

1. Montrer que ∀x∈IR:

$g'(x) = \frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{2}x} - 1).$

2.a. Montrer que g est décroissante sur $[0; +\infty[$.

b. Déduire que ∀x ≥ 0:

$1 - e^{-\frac{1}{2}x} \leq \frac{1}{2}x.$

3. Montrer que ∀x ≥ 0:

$\frac{1-e^{-\frac{1}{2}x}-x}{x^2} \leq -\frac{1}{2x}$

et déduire lim $_{x\to 0^+} \frac{1-e^{-\frac{1}{2}x}-x}{x^2}$.

4.a. Montrer que:

la fonction $G : x \to 2e^{-\frac{1}{2}x} - (\frac{1}{2}x - 1)^2$ est une primitive de g sur IR

b. Montrer que:

$\int_0^4 g(x)dx = 2e^{-2}(1-e)(1+e).$

Exercice 4: (6,5 Pts)

On considère la fonction f définie sur IR par:

$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \neq 0\text{: } f(x) = 2x + x\ln(1 + \frac{1}{x^2}) \end{cases}$

1. Montrer que f est impaire.

2.a. Vérifier que $\forall x \in]0; +\infty[$:

$x\ln(1 + \frac{1}{x^2}) = x\ln(1 + x^2) - 2x\ln(x)$..

b. Deduire que f est continue à droite en 0.

c. Etudier la dérivabilité de f a droite en 0 puis interpreter le résultat.

3. Montrer que:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

4. a. Montrer que $\forall x \in R_+^*$:

$f'(x) = \ln(1 + \frac{1}{x^2}) + \frac{2x^2}{x^2+1}.$

b. Montrer que : $\forall x \in IR_+^*$: $\ln(1 + \frac{1}{x^2}) > 0.$

c. Déduire que f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

puis dresser le tableau de variation de f sur IR

5.a. Montrer que:

$\lim_{x\to+\infty} x^2\ln(1 + \frac{1}{x^2}) = 1.$

(poser . $t = \frac{1}{x^2}$)

b. Déduire que la droite (Δ) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique

(DC) au voisinage de $+\infty$.

c. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[$: $f(x) > 2x$.
déduire que (C) est au-dessus de la droite (\Delta) sur $]0;+\infty[$.
6. Tracer la courbe (C)
et la droite (Δ) dans un repère orthonormé
$(O;\vec{i};\vec{j})$. (unité: $1cm$)
7. Montrer que:
$\int_1^2 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(\frac{5}{2})$.
8. En utilisant une intégration par partie, montrer que:
$\int_1^2 x\ln(1+\frac{1}{x^2})dx = \frac{5}{2}\ln(\frac{5}{4})$.
9. Déduire en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C)
et (Δ) et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

By Prof. Mohammed Diaz

Exercice 3: (4,5 Pts)

On considère la fonction g definie sur IR par:
$g(x) = 1 - e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}x$.
1. Montrer que $\forall x \in IR$:
$g'(x) = \frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{2}x} - 1)$.

$$\left(e^{U(x)}\right)' = U'(x)\,e^{U(x)}$$

$\forall x \in IR \quad g'(x) = -\left(-\frac{1}{2}x\right)' e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{2}x} - 1\right)$

2.a. Montrer que g est décroissante sur $[0;+\infty[$.
b. Déduire que $\forall x \geq 0$:
$1 - e^{-\frac{1}{2}x} \leq \frac{1}{2}x$.

$x \geq 0$

a) $e^{-\frac{1}{2}x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{-\frac{1}{2}x} - 1$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	0	$\searrow$	