الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك الدولية
الدورة العادية 2022
- الموضوع 01 -

ssssssssssssssssssssssss | SN F23

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵡⵏⵏⵓⵏⵜ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Calcul de probabilités.	3 points
Exercice 3	Nombres complexes.	3.5 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral	10.5 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 01 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$,on considère les points :

$$A(-3;0;0)\ ;B(1;0;-2) \text{ et } C(-1;1;0)$$

0,5 1) a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

0,5 b) En déduire $x-2y+2z+3=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2) Soit (S_α) une sphère définie par l'équation cartésienne suivante :

$$(S_\alpha) :\ x^2+y^2+z^2+2\alpha y-2\alpha z+\alpha^2+\alpha-1=0$$

0,5 a) Montrer que le centre de la sphère (S_α) est : $\Omega_\alpha(0;-\alpha;\alpha)$ et son rayon $R=\sqrt{\alpha^2-\alpha+1}$.

0,5 b) Calculer : $d(\Omega_\alpha,(ABC))$

0,5 c) Déterminer la valeur de α pour laquelle le plan (ABC) est coupe la sphère (S_α) selon un cercle (C).

0,5 d) Déterminer le rayon r de cercle (C)

Exercice 02 : (3 pts)

Une urne contient 10n boules indiscernable au toucher (où : $n \in \mathbb{N}^*$) de deux types A et B donnés par le tableau suivant :

Couleur type	Rouge	Vert
A	2n	n
B	4n	3n

1) On tire au hasard une boule de l'urne.
Calculer la probabilités les évènements suivants.

0,5 A : « Obtenir une boules rouge »

0,5 B : « Obtenir une boule rouge de type A »

0,5 2) Sachant que la boule tirée est rouge, calculer la probabilité qu'elle soit de type A .

3) On tire au hasard et simultanément 2 boules de l'urne.

0,5 a) Calculer la probabilité p_n d'obtenir deux boules de couleurs différentes .

0,5 b) Calculer la probabilité p'_n d'obtenir deux boules de boule de mêmes couleurs .

0,5 c) En déduire la valeur minimale de n pour que : $p'_n > p_n$

Exercice 03 : (3.5 pts)

Soit α un nombre complexe non nul .

Partie I :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α) : $z^2-i\alpha z\sqrt{3}-\alpha^2=0$.

On pose : $Z=\frac{iz}{\alpha}$

0,25 1- a) Montrer que l'équation (E_α) est équivalente à l'équation : (E) : $Z^2+Z\sqrt{3}+1=0$

0,5 b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

0,25 c) En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation (E_α) .

0,25 2- Sachant que $\alpha=|\alpha|e^{im}$, $m \in \mathbb{R}$
Mettre les deux racines de l'équation (E_α) sous formes exponentielles .

Partie II :

Le plan complexe est rapporté á un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$,

On considère Ω , M_1 et M_2 les points d'affixes respectives α , $z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et $z_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$.

Et soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

0,5 1- a) Montrer que $R(\Omega)=M_1$ et que $R(M_1)=M_2$

0,25 b) En déduire que les triangles $O\Omega M_1$ et OM_1M_2 sont équilatéraux .

0,25 2- a) Vérifier que $z_1-z_2=\alpha$

0,5 b) Montrer que les deux droites (OM_1) et (ΩM_2) sont ortogonales .

0,25 c) En déduire que $O\Omega M_1M_2$ est un losange .

0,5 3- Montrer que pour tout réel θ le nombre $z=\frac{z_2-\alpha}{z_1-\alpha} \div \frac{z_2-|\alpha|e^{i\theta}}{z_1-|\alpha|e^{i\theta}}$ est un réel.

Problème 04 : (10.5 pts)

Partie I :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right); & \forall x \in]0; +\infty[\\ f(0) = 0 & \end{cases}$$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ (On prendra $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1cm$)

0,5 1)On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{1}{1+x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

0,75 a) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to0+} h(x)$.

0,5 b) Calculer : $h'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$ puis dresser le tableau de variation de la fonction h.

0,5 c) En déduire que : $(\forall x \in]0; +\infty[)$; $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

2) Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[)$; $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

3) En utilisant la question 2.

0,25 a) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0

0,5 b) Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0 et interpréter le résultat géométriquement.

0,25 c) En utilisant la question 2, montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique dont on précisera la direction.

0,5 4- a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[) \ ; \ f'(x) = 3x^2\left(ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(1+x)}\right)$$

0,25 b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur I . (on pourra utiliser la question 2))

0,5 c) Dresser le tableau de variation de f.

5- Pour tout $x\ de\ ]0; +\infty[$; on pose : $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

0,5 a) Vérifier que : $(\forall x \in]0; +\infty[)$; $g'(x) = 2x\left(ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(1+x)}\right)$, en déduire que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

0,5 b) Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$, une solution unique notée α, puis vérifier que : $\alpha \in]1\,;2[$ (on prendra $ln2 = 0.7\ et\ ln\frac{3}{2} = 1.5$)

0,25 c) En déduire que les seules solutions de l' équations $f(x) = x\ sont\ 0\ \ et\ \alpha$

0,5 6) Représenter graphiquement la courbe (C).

0,5 7- a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

0,25 b) Construire la courbe (C') de la fonction f^{-1} dans le même repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

0,75 8) a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$\int_\alpha^1 f(x)dx = \frac{\ln 2}{4} - \frac{\alpha^4}{4}\ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{4}\int_\alpha^1 \frac{x^3}{x+1}dx$$

0,25 b) Calculer $\int_\alpha^1 \frac{x^3}{x+1}dt$ (on remarque que : $\frac{x^3}{1+x} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{1+x}$)

0,5 c) En déduire que l'aire délimite par la courbe (C) et l'axe des abscisses et la droite de l'équation x =1 et x= α est $A = -\frac{5}{24} + \frac{\alpha^3}{12} - \frac{\alpha^2}{8} + \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{4}\ln(1+\alpha) + \frac{\alpha^4}{4}\ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\ cm^2$

Partie II :

On considère la suite $(U_n)_{n\geq0}$ définie par : $0 < U_0 < \alpha$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$

0,5 1) Montrer par récurrence que : $(\forall\, n \in \mathbb{N})$: $0 < U_n < \alpha$

0,5 2) a) Montrer que : $g(]0; \alpha[) =]0; 1[$

0,25 b) En déduire que la suite $(U_n)_{n\geq0}$ est strictement croissante.

0,25 c) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq0}$ est convergente.

0,5 3) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$