

BAB 8. PENYEDERHANAAN FUNGSI BOOLE

A. Bentuk Kanonik

Ekspresi Boolean yang mengespesifikasikan suatu fungsi dapat disajikan kedalam dua bentuk kanonik berbeda yaitu:

1. Penjumlahan dari hasil kali (sum of product atau SOP)

Memiliki bentuk kanonik $f(A,B,C) = \bar{A} \bar{B} C + A \bar{B} \bar{C} + ABC$ dimana setiap suku didalam ekspresi mengandung literal yang lengkap baik peubah yang tulis dalam komplemen maupun tidak. Pada SOP peubah tanpa komplemen memiliki nilai 1 dan peubah dengan komplemen memiliki nilai 0.

2. Perkalian dari hasil jumlah (product of sum atau POS)

Memiliki bentuk kanonik $f(A,B,C) = (A + B + C)(A + \bar{B} + C)(\bar{A} + \bar{B} + C)$ dimana setiap suku didalam ekspresi mengandung literal yang lengkap baik peubah yang tulis dalam komplemen maupun tidak. Pada POS peubah tanpa komplemen memiliki nilai 0 dan peubah dengan komplemen memiliki nilai 1.

Lebih jelas dapat dilihat pada tabel berikut

ABCD	Minterm		Maksterm	
	Term	Lambang	Term	Lambang
0000	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	m_0	$A + B + C + D$	M_0
0001	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	m_1	$A + B + C + \bar{D}$	M_1
0010	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$	m_2	$A + B + \bar{C} + D$	M_2
0011	$\bar{A}\bar{B}CD$	m_3	$A + B + \bar{C} + \bar{D}$	M_3
0100	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	m_4	$A + \bar{B} + C + D$	M_4
0101	$\bar{A}B\bar{C}D$	m_5	$A + \bar{B} + C + \bar{D}$	M_5
0110	$\bar{A}BC\bar{D}$	m_6	$A + \bar{B} + \bar{C} + D$	M_6
0111	$\bar{A}BCD$	m_7	$A + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$	M_7
1000	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	m_8	$\bar{A} + B + C + D$	M_8

1001	$A\bar{B}\bar{C}D$	m_9	$\bar{A} + B + C + \bar{D}$	M_9
1010	$A\bar{B}C\bar{D}$	m_{10}	$\bar{A} + B + \bar{C} + D$	M_{10}
1011	$A\bar{B}CD$	m_{11}	$\bar{A} + B + \bar{C} + \bar{D}$	M_{11}
1100	$AB\bar{C}\bar{D}$	m_{12}	$\bar{A} + \bar{B} + C + D$	M_{12}
1101	$AB\bar{C}D$	m_{13}	$\bar{A} + \bar{B} + C + \bar{D}$	M_{13}
1110	$ABC\bar{D}$	m_{14}	$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + D$	M_{14}
1111	$ABCD$	m_{15}	$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$	M_{15}

Contoh 1.

Tuliskan bentuk kanonik SOP dan POS, tabel kebenaran dan gerbang logika dari hasil SOP dari persamaan $f(A,B,C) = A + \bar{B}C$

Jawab:

SOP

Lengkapi terlebih dahulu literal untuk setiap suku agar jumlahnya sama.

$$\begin{aligned}
 A &= A(B + \bar{B}) && \text{Dikalikan } (B + \bar{B}) \text{ karena suku 1 kekurangan variabel B} \\
 &= AB + A\bar{B} \\
 &= AB(C + \bar{C}) + A\bar{B}(C + \bar{C}) && \text{Dikalikan } (C + \bar{C}) \text{ karena suku 1 kekurangan variabel C} \\
 &= ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} \\
 \bar{B}C &= \bar{B}C(A + \bar{A}) && \text{Dikalikan } (A + \bar{A}) \text{ karena suku 2 kekurangan variabel A} \\
 &= A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}C
 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } f(A,B,C) = A + \bar{B}C$$

$$\begin{aligned}
 &= ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}C \\
 &= \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC \text{ suku yang bernilai sama dihilangkan} \\
 &= m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 = \sum(1,4,5,6,7)
 \end{aligned}$$

POS

Perhatikan berdasarkan contoh soal persamaan fungsi diberikan dalam bentuk SOP untuk itu harus dilakukan perubahan kedalam bentuk POS !

$$f(A,B,C) = A + \bar{B}C \text{ ubah terlebih dahulu kedalam format POS}$$

$$= (A + \bar{B})(A + C)$$

Hukum Distributif

Lengkapi literal untuk setiap suku agar jumlahnya sama

$$(A + \bar{B}) = (A + \bar{B}) + (C\bar{C}) \quad \text{Dijumlahkan dengan } (C\bar{C}) \text{ karena suku 1 kekurangan C}$$

$$(A + C) = (A + C) + B\bar{B} \quad \text{Dijumlahkan dengan } (B\bar{B}) \text{ karena suku 2 kekurangan B}$$

$$= (A + \bar{B} + C)(A + \bar{B} + \bar{C})(A + B + C)(A + \bar{B} + C)$$

$$\text{Jadi } f(A,B,C) = (A + \bar{B})(A + C)$$

$$= (A + \bar{B} + C)(A + \bar{B} + \bar{C})(A + B + C)(A + \bar{B} + C)$$

suku yang bernilai sama $(A + \bar{B} + C)$ hilangkan hingga menjadi

$$M_0, M_2, M_3 = \pi(0, 2, 3)$$

Jika diperhatikan bahwa apabila SOP menghasilkan $\sum(1,4,5,6,7)$ maka POS merupakan sisanya $\pi(0,2,3)$

Tabel Kebenaran

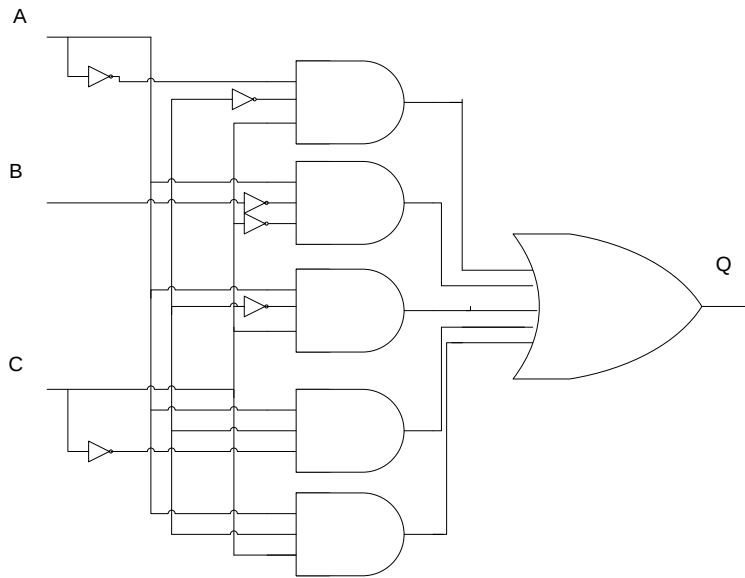
SOP	
ABC	f
000	0
001	1
010	0
011	0
100	1
101	1
110	1
111	1

Kolom fungsi diberikan nilai 1 untuk semua kombinasi hasil SOP dan 0 untuk hasil POS

Kolom nilai variabel ABC diisikan dengan kombinasi kemungkinan munculnya variabel. Jumlah kemungkinan didapat dari 2^n dimana n merupakan variabel. $2^3 = 8$ baris kemungkinan.

Gerbang Logika

$$SOP = \bar{A} \bar{B} C + A \bar{B} \bar{C} + A \bar{B} C + A B \bar{C} + A B C$$



B. Penyederhaan Fungsi Boolean secara aljabar

Jumlah literal dalam sebuah fungsi aljabar Boolean dapat diminumkan dengan dua metode yaitu:

- Penyederhanaan fungsi Boolean secara aljabar
- Penyederhaan Fungsi Boolean Dengan Peta Karnaugh (K-Map)

1. Penyederhanaan fungsi Boolean secara hukum aljabar

Hukum-Hukum dan Teori Aljabar Boole

Hukum Identitas:	$A + 0 = A$	$A \times 1 = A$
Hukum Idempoten:	$A + A = A$	$A \times A = A$
Hukum Komplemen	$A + \bar{A} = 1$	$A \times \bar{A} = 0$
Hukum Dominansi	$A + 1 = 1$	$A \times 0 = 0$
Hukum Involusi:	$\bar{\bar{A}} = A$	

Hukum Komutatif:	$A + B + C = C + B + A$	$A \times B \times C = C \times B \times A$
Hukum Asosiatif:	$(A + B) + C$	$A + (B + C)$
	$(A \times B) \times C$	$A \times (B \times C)$
Hukum Distributif:	$A(B + C) = AB + AC$	$A + (B \times C) = (A+B) (A+C)$

2. Penyederhaan Fungsi Bolean Dengan Peta Karnaugh (K-Map)

Ditemukan oleh Maurice Karnaugh tahun 1953 dengan metode grafis. Yaitu dengan mengelompokkan pasangan angka 1 yang saling berdekatan. Dua kotak berdekatan (pair), empat kotak (Quad) atau empat kotak berdekatan (oktet). Untuk dapat melakukan minimisasi peta Karnaugh sebaiknya pemahaman mengenai pengisian nilai-nilai SOP dan POS pada Karnaugh dipahami terlebih dahulu.

Apabila pengelompokan dimungkinkan untuk keadaan 2 dan 4 berdampingan

Metode Penempatan SOP dan POS pada peta Karnaugh

Peta Karnaugh untuk 2 variabel (Jumlah kotak 2^n , n = variabel maka $2^2 = 4$)

		0	1	B
A	0	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	
	1	$A\overline{B}$	AB	

Contoh : 2

$$f(A,B,C) = A\overline{B} + AB$$

$A\overline{B}$ dalam biner 10 penempatan pada karnaugh baris $A = 1$, kolom $B = 0$

AB dalam biner 11 penempatan pada karnaugh baris $A = 1$, kolom $B = 1$

Menjadi sebagai berikut:

		0	1	B
A	0	0	0	
	1	1	1	

Baris 2 kolom 1 dan baris 2 kolom 2 diisikan dengan 1 karena fungsi merupakan bentuk SOP.
 Untuk mendapatkan fungsi POS didapat dari nilai 0 yaitu : $\overline{AB} + \bar{A}B$

$$\begin{aligned} \text{POS} &= \overline{AB} + \bar{A}B \\ &= \overline{AB + \bar{A}B} \\ &= (A + B) \cdot (A + \bar{B}) \end{aligned}$$

Peta Karnaugh untuk 3 variabel (Jumlah kotak 2^n , n = variabel maka $2^3 = 8$)

		BC			
		00	01	11	10
A	0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}B\overline{C}$
	1	$A\overline{B}\overline{C}$	$A\overline{B}C$	ABC	$AB\overline{C}$

Contoh : 3

$$f(A,B,C) = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

$\overline{A}B\overline{C}$ dalam bentuk biner 010 penempatan pada A = 0 , BC = 10

$AB\overline{C}$ dalam bentuk biner 110 penempatan pada A = 1, BC = 10

ABC dalam bentuk biner 111 penempatan pada A = 1 , BC = 11

Pengisian pada peta Karnaugh menjadi sebagai berikut:

		BC			
		00	01	11	10
A	0	0	0	0	1
	1	0	0	1	1

Baris 1 kolom 1, baris 2 kolom 3 dan baris 2 kolom 4 diisikan dengan 1 karena fungsi merupakan bentuk SOP. Untuk mendapatkan fungsi POS didapat dari nilai 0 pada Karnaugh yaitu : $\overline{ABC} + \overline{A}BC + A\overline{BC} + A\overline{B}C$

$$\begin{aligned} \text{POS} &= \overline{ABC} + \overline{A}BC + A\overline{BC} + A\overline{B}C \\ &= \overline{\overline{ABC} + \overline{A}BC + A\overline{BC} + A\overline{B}C} \\ &= (A+B+C) (A+B+\overline{C}) + (\overline{A} + B + C) (\overline{A} + B + \overline{C}) \end{aligned}$$

Peta Karnaugh untuk 4 variabel (Jumlah kotak 2^n , n = variabel maka $2^4 = 16$)

		CD			
		00	01	11	11
AB	00	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$	$\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$	$\overline{A}\overline{B}CD$
	01	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}BC\overline{D}$	$\overline{A}BCD$
	11	$A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$A\overline{B}\overline{C}D$	$ABC\overline{D}$	$ABCD$
	10	$A\overline{B}C\overline{D}$	$A\overline{B}CD$	$AB\overline{C}\overline{D}$	$AB\overline{C}D$

Pengisian pada peta Karnaugh untuk 4 variabel mengikuti aturan yang berlaku pada variabel sebelumnya.

Penggulungan

Teknik ini digunakan melakukan pengelompokan ketika ditemukan letak posisi angka 1 berada pada sisi yang berseberangan (sisi kiri dengan kanan dan sisi atas dengan bawah). Kotak yang berada pada sisi berseberangan dianggap bertetangga juga dengan cara menautkan atau melakukan penggulungan.

Semakin banyak terbentuknya kelompok angka satu maka semakin banyak suku (term) yang terbentuk. Semakin banyak suku maka persamaan semakin tidak sederhana.

Bila ditemukan sebuah kelompok dapat terbentuk dengan 2 atau 4 pasangan dalam satu peta maka pilihlah pasangan dengan jumlah terbesar yaitu 4.

Minimisasi fungsi Boolean dengan peta Karnaugh

Minimisasi dilakukan dengan cara melingkari kelompok angka 1 berdekatan yang berpasangan 2, 4 atau 8 pasang. Kemudian lakukan peninjauan terhadap baris dan kolom pada masing-masing pasangan tersebut untuk mengambil posisi nilai yang sama atau menghilangkan nilai yang tidak sama.

Contoh 4.

Sederhanakan fungsi berikut ini $f(A,B,C) = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D}$ dengan metode :

- K-Map
- Hukum Aljabar

Jawab:

- K-Map

Perhatikan nilai kesamaan terhadap AB dan CD untuk masing-masing kelompok

$$f(A,B,C) = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} = \overline{A}\overline{C}\overline{D} + AC\overline{D}$$

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	0	0	0
	01	1	0	0	0
	11	0	0	0	1
	10	0	0	0	1

Ling I = $\overline{A}\overline{C}\overline{D}$

Ling II = $AC\overline{D}$

Lingkaran I = ditarik terhadap CD kelompok angka sama pada posisi $\overline{C}\overline{D}$

= ditarik terhadap AB kelompok angka sama pada posisi $\overline{A}$

Maka lingkaran I bernilai $\overline{A}\overline{C}\overline{D}$

Lingkaran II = ditarik terhadap CD kelompok angka sama pada posisi $C\overline{D}$

= ditarik terhadap AB kelompok angka sama pada posisi A

Maka lingkaran I bernilai $AC\overline{D}$

b. Dengan Hukum Aljabar

$$\begin{aligned}
 f(A,B,C) &= \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} \\
 &= \overline{A}\overline{C}\overline{D}(B+\overline{B}) + A\overline{C}\overline{D}(B+B) \quad \text{Hukum distributif} \\
 &= \overline{A}\overline{C}\overline{D} \cdot 1 + A\overline{C}\overline{D} \cdot 1 \quad \text{Hukum komplemen} \\
 &= \overline{A}\overline{C}\overline{D} + A\overline{C}\overline{D}
 \end{aligned}$$

Contoh 5.

Sederhanakan fungsi berikut $f(A,B,C) = A\overline{C} + \overline{B}C + AB\overline{C}$ dengan metode:

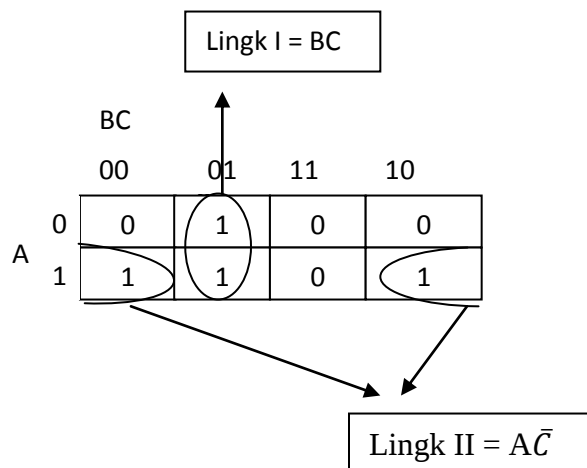
- K-Map
- Hukum Aljabar

Jawab:

- K-Map

Perhatikan nilai kesamaan terhadap A dan BC untuk masing-masing kelompok

$$f(A,B,C) = A\overline{C} + \overline{B}C + AB\overline{C} = A\overline{C} + \overline{B}C$$



Lingkaran I = ditarik terhadap BC kelompok angka sama pada posisi $\overline{B}C$

= ditarik terhadap A kelompok angka tidak memiliki kesamaan

Maka lingkaran I bernilai $\overline{B}C$

Lingkaran II = ditarik terhadap BC kelompok angka sama pada posisi $\overline{C}$

= ditarik terhadap A kelompok angka sama pada posisi A

Maka lingkaran II bernilai $A\bar{C}$

b. Hukum Aljabar

$$f(A,B,C) = A\bar{C} + \bar{B}C + AB\bar{C}$$

$$= A\bar{C} \cdot 1 + \bar{B}C + AB\bar{C}$$

Hukum identitas

$$= A\bar{C} (1 + B) + \bar{B}C$$

Hukum distributif

$$= A\bar{C} \cdot 1 + \bar{B}C$$

Hukum dominansi

$$= A\bar{C} + \bar{B}C$$

Keadaan Don't Care

Keadaan don't care berlaku pada kombinasi BCD dimana kombinasi variabel hanya memenuhi 0000 sampai 1001 sementara untuk 1010 sampai 1111 tidak mungkin terjadi pada operasi normalnya.

Representasi angka-angka 1010 sampai dengan 1111 pada K-Map dilakukan dengan memberikan tanda silang yang diartikan bahwa dapat dipergunakan untuk nilai 0 atau 1.

Contoh 6.

Sederhanakan persamaan Boole $f(A,B,C,D) = \sum m(2,3,7,8,9)$ dengan keadaan don't care $f(A,B,C,D) = \sum m(10,11,12,13,14,15)$

		CD				
		00	01	11	11	
AB	00	0	0	x	1	$\bar{B}CD$
	01	0	0	x	0	
	11	1	1	x	x	A
	10	1	1	x	x	

Bentuk Sum Of Product dari peta tersebut adalah $A + \bar{B}CD$

		CD				
		00	01	11	11	
AB	00	0	0	x	1	→ AC
	01	0	0	x	0	
	11	1	1	x	x	→ BCD
	10	1	1	x	x	

$$\begin{aligned}
 \text{Bentuk Product Of Sum} &= \overline{AC} + BCD \\
 &= \overline{\overline{AC} + BCD} \\
 &= (A + C)(\bar{B} + \bar{C} + \bar{D})
 \end{aligned}$$

Latihan !

1. Tuliskan bentuk SOP dan POS dari fungsi berikut:
 - a. $\Pi(0,2,4,5)$
 - b. $f(A,B,C) = \bar{C} + AB + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$
2. Nyatakan persamaan fungsi-fungsi boole dibawah ini kedalam rangkaian gerbang logika:
 - a. $AB + BC + \bar{C}D$
 - b. $\overline{AB} \cdot (A+C)$
 - c. $AB + \bar{A}B$
3. Sederhanakan persamaan Boole berikut ini dengan menggunakan Hukum aljabar Boolean
 - a. $AB + \bar{A}C + BC$
 - b. $AB\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D + ABC\bar{D} + AB\bar{C}D + \overline{AB}\bar{C}\bar{D} + \overline{AB}\bar{C}D + A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D}$
4. Sederhanakan persamaan Boole berikut ini dengan menggunakan peta Karnaugh
 - a. $f(A,B,C) = ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C}$
 - b. $f(A,B,C,D) = \bar{A}B + BD + A\bar{B}C + BC\bar{D}$
5. Sederhanakan maksterm dan minterm berikut dengan menggunakan peta Karnaugh
 - a. $\pi M = (1,3,5,7,9,11,13,15)$
 - b. $\sum m = (0,4,6,8,9,10,11,15)$