Généralités sur les fonctions

1 ENSEMBLE DE DÉFINITION – PARITÉ D'UNE FONCTION

1.1. ENSEMBLE DE DÉFINITION D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Définition

$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = y$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

Une fonction f définie d'un ensemble A dans $\mathbb{R}$ est la donnée pour chaque élément de A d'un unique élément y de $\mathbb{R}$ appelé image de x. On note alors $y = f(x)$.

L'ensemble A, des nombres réels qui possèdent une image par f, est appelé ensemble de définition de la fonction numérique f. Il est noté traditionnellement D_f.

Remarque

L'ensemble de définition d'une fonction f est la plus grande partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle on peut calculer la valeur de $f(x_0)$ en tout point x_0 de cette partie. On a donc :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$$

En pratique, on utilise souvent l'équivalence : $x \in D_f \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ et } f(x) \in \mathbb{R})$

Exemples

1) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - \sqrt{2}$:

$D_f = \mathbb{R}$

2) L'ensemble de définition de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{5x+1}{x^2 - 3x + 2}$:

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 \neq 0\}$

Résolvons l'équation : $x^2 - 3x + 2 = 0$

$(\Delta = 9 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0)$

$\hookrightarrow x = \dfrac{3 - \sqrt{1}}{2}$ ou $x = \dfrac{3 + \sqrt{1}}{2}$

$\hookrightarrow x = 1$ ou $x = 2$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1 \text{ et } x \neq 2\}$

$= \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} =]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2 ; +\infty[$.

3) L'ensemble de définition de la fonction h définie par $h(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$:

$D_h = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2-3x+2 \geq 0\}$

Résolvons l'inéquation $x^2-3x+2 \geq 0$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_h =]-\infty, 1] \cup [2; +\infty[$.

4) L'ensemble de définition de la fonction k définie par $k(x)=\sqrt{x-3}+\dfrac{1}{x-5}$:

$D_k = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x-3 \geq 0 \text{ et } x-5 \neq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 3 \text{ et } x \neq 5\}$

$= [3, 5[\cup]5; +\infty[$.

2) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \dfrac{x-1}{x^2-5x-6} \geq 0 \text{ et } x^2-5x-6 \neq 0\}$

Applications

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2-x-1}$; **2)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-5x-6}}$; **3)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-5x-6}}$

4) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{2|x|-1}$; **5)** $f(x)=\dfrac{\tan x}{\cos x-1}$; **6)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin^2 x+\sin x-2}$

1)

1/ $f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2-x-1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2x^2-x-1 \neq 0\}$

Resoulvent l'équation :

$2x^2-x-1=0$

$\Delta = 1-4.2.-1$

$= 1+8$

$= 9$

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{4}{4} = 1 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}, 1\}$

$D_f =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}, 1[$

$\cup]1, +\infty[$

2)

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{x-1}{x^2-5x-6} \geq 0 \text{ et } x^2-5x-6 \neq 0\}$

x	$-\infty$		-1		1		6		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-5x-6		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x-1}{x^2-5x-6}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot -6$
$= 49$
$\sqrt{\Delta} = 7$
$\begin{cases} x_1 = \frac{5+7}{2} = 6 \\ x_2 = \frac{5-7}{2} = -1 \end{cases}$

~~et $x \neq 6$ et~~

$D_f =]-1, 1] \cup]6, +\infty[$

3) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-5x-6}}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x - 1 \geq 0 \text{ et } x^2 - 5x - 6 > 0\}$
$=]6; +\infty[$.

4) $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{2|x|-1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0 \text{ et } 2|x| - 1 \neq 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0 \text{ et } |x| \neq \frac{1}{2}\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0 \text{ et } (x \neq \frac{1}{2} \text{ et } x \neq -\frac{1}{2})\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0 \text{ et } x \neq \frac{1}{2}\}$.
$= [0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$.

5) $f(x) = \frac{\tan x}{\cos x - 1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \cos x - 1 \neq 0 \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \cos x - 1 \neq 0 \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

resoulevent l'equation:

$\cos x = 1$

$\cos x = \cos(0)$

$x = 2k\pi$ $/ k \in \mathbb{Z}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 2k\pi \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

$D_f = \mathbb{R} - \{2k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin^2 x+\sin x-2}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / x\geq 0 \text{ et } \sin^2 x+\sin x-2\neq 0\}$

Résolvons l'équation $\sin^2 x+\sin x-2=0$ (E)

on pose $t=\sin x$

$(E) \Leftrightarrow t^2+t-2=0$

$\Leftrightarrow t=\frac{-1-3}{2}$ ou $t=\frac{-1+3}{2}$ $\quad \left(\begin{array}{l}\Delta=1-4\times1\times(-2)\\ =9>0\end{array}\right)$

$\Leftrightarrow t=-2$ ou $t=1$

$\Leftrightarrow \sin x=-2$ ou $\sin x=1$

$\Leftrightarrow \sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}$

$\boxed{\begin{array}{c}\sin x=\sin a\\ \Updownarrow\\ x=a+2k\pi\\ \text{ou}\\ x=\frac{\pi}{2}-a+2k\pi\\ (a\neq\frac{\pi}{2})\end{array}}$

$D_f=\mathbb{R}_+ \setminus \{\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

1.2. PARITÉ D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

- On dit que la fonction f est paire si pour tout $x\in D_f$: $-x\in D_f$ et $f(-x)=f(x)$.
- On dit que la fonction f est impaire si pour tout $x\in D_f$: $-x\in D_f$ et $f(-x)=-f(x)$.

Exemples

1) Les fonctions suivantes :

$f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 3x^2$; $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 2|x|-3$; $f_3:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2-\frac{3}{x^2}$; $f_4:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\cos x$

sont des fonctions paires.

2) Les fonctions suivantes :

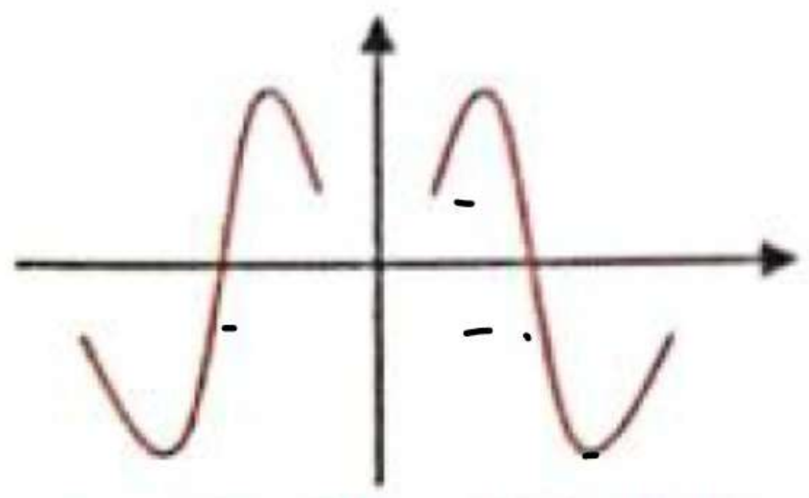
$g_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto -5x$; $g_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{1}{2}x^3$; $g_3:\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sin x-\tan x$; $g_4:]-1;1[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$

sont des fonctions impaires.

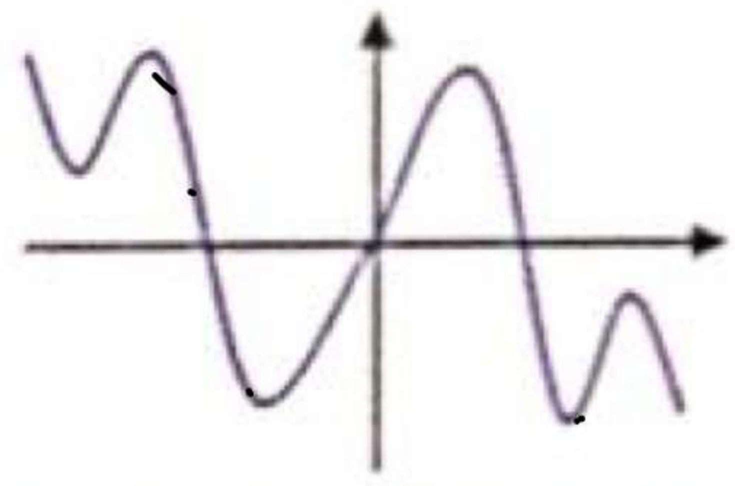
Proposition

Si f est une fonction paire, alors l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de sa courbe $\mathscr{C}_f$.

Si f est une fonction impaire, alors l'origine du repère est un centre de symétrie de sa courbe $\mathscr{C}_f$.



Graphe d'une fonction paire



Graphe d'une fonction impaire

Applications

Étudier la parité de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{4-x^2}}$; 3) $f(x)=x^3-x^2+1$

4) $f(x)=\dfrac{\sin x}{2\cos x-1}$; 5) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; 6) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^4+1}$

ni paire ni imp ✓ (5) — paire ✓ (6)

Solution :

1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2+1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 \neq -1\}$

$$D_f = \mathbb{R}$$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \; -x \in D_f$
- $f(-x) = \dfrac{3(-x)}{(-x)^2+1} = -\dfrac{3x}{x^2+1} = -f(x)$

Alors f est impaire.

2) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 4 - x^2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 < 4\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, -\sqrt{4} < x < \sqrt{4}\}$

$=]-2\,;2[$.

Soit $x \in [-2\,;2] \rightarrow -2 \leq x \leq 2$

$\Rightarrow -2 \leq -x \leq 2$

$\rightarrow -x \in D_f$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{\sqrt{4-(-x)^2}} = \frac{x^2-1}{\sqrt{4-x^2}} = f(x)$$

Alors f est paire.

3) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$,

- $\forall x \in D_f$; $-x \in D_f$
- $f(-x) = -x^3 - x^2 + 1 \neq f(x)$ et $-f(x)$

Donc f n'est ni paire ni impaire.

4) $f(x) = \dfrac{\sin x}{2\cos x - 1}$ $\qquad \cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -y + 2k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$

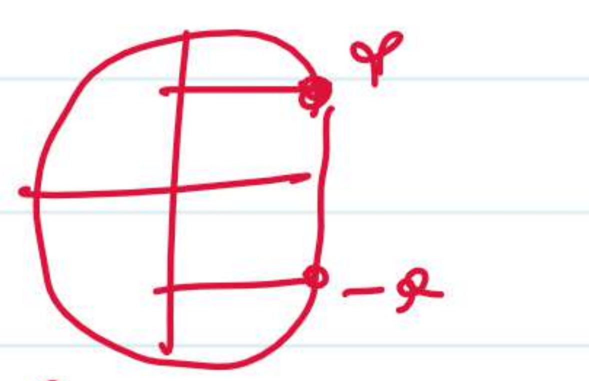
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2\cos x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \cos x \neq \tfrac{1}{2}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, \cos x \neq \cos(\tfrac{\pi}{3})\}.$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \tfrac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ et } x \neq -\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi\}$$
$$= \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi \,;\, -\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$$

- $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $x \neq -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow -x \neq -\frac{\pi}{3} - 2k\pi$ et $-x \neq \frac{\pi}{3} - 2k\pi$

$\Leftrightarrow -x \neq -\frac{\pi}{3} + 2K\pi$ et $-x \neq \frac{\pi}{3} + 2K\pi \,/\, K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow -x \in D_f$



$\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$

$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$

- $f(-x) = \dfrac{2\sin(-x)}{2\cos(-x) - 1} = \dfrac{-2\sin x}{2\cos x - 1} = -f(x)$

Alors : f est impaire.

2 MONOTONIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

2.1. SENS DE VARIATIONS D'UNE FONCTION (RAPPELS)

Définition

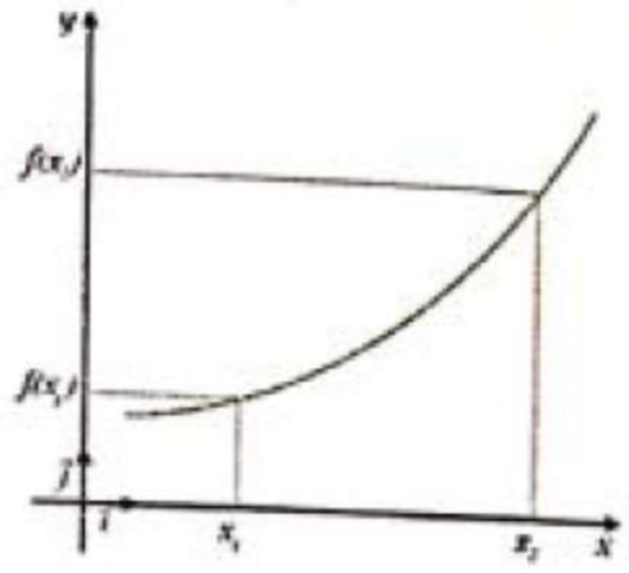
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I inclus dans son ensemble de définition.

- On dit que la fonction f est croissante sur I si :

$$\left(\forall(x_1;x_2)\in I^2\right)\ \left(x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)\right)$$

- On dit que la fonction f est strictement croissante sur I si :

$$\left(\forall(x_1;x_2)\in I^2\right)\ \left(x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\right)$$

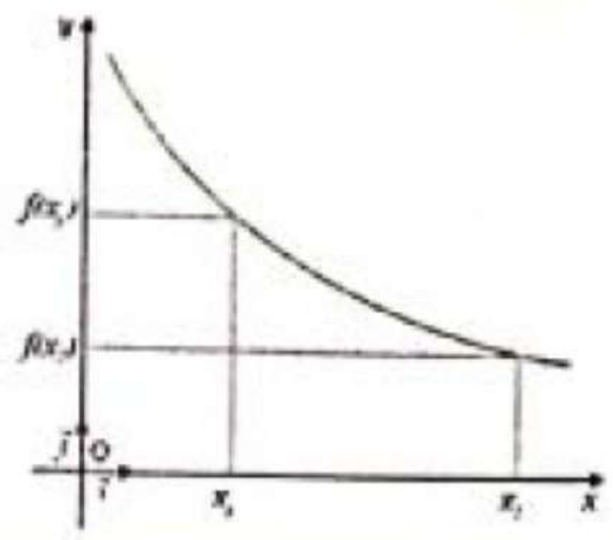


- On dit que la fonction f est décroissante sur I si :

$$\left(\forall(x_1;x_2)\in I^2\right)\ \left(x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)\right)$$

- On dit que la fonction f est strictement décroissante sur I si :

$$\left(\forall(x_1;x_2)\in I^2\right)\ \left(x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\right)$$



Proposition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I , x_1 et x_2 deux éléments distincts de I .

Le nombre $T(x_1;x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ est appelé le taux de variation (ou d'accroissement) de la fonction f entre x_1 et x_2. De plus, on a les propriétés suivantes :

- f est croissante sur I si, et seulement si : $\left(\forall(x_1;x_2)\in I^2\right): x_1\neq x_2\Rightarrow T(x_1\,;\,x_2)\ge 0$.
- f est strictement croissante sur I si, et seulement si : $\left(\forall(x_1;x_2)\in I^2\right): x_1\neq x_2\Rightarrow T(x_1\,;\,x_2)>0$.
- f est décroissante sur I si, et seulement si : $\left(\forall(x_1;x_2)\in I^2\right): x_1\neq x_2\Rightarrow T(x_1\,;\,x_2)\le 0$.
- f est strictement décroissante sur I si, et seulement si : $\left(\forall(x_1;x_2)\in I^2\right): x_1\neq x_2\Rightarrow T(x_1\,;\,x_2)<0$.

Exemple

1) $f(x)=\sqrt{x^3-1}$ $\qquad D_f=[1;+\infty[$

Soit $x,y\in[1;+\infty[$.

$x<y\Rightarrow x^3<y^3\Rightarrow 0<x^3-1<y^3-1$

$\Rightarrow \sqrt{x^3-1}<\sqrt{y^3-1}$

$\Rightarrow f(x)<f(y)$

donc f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

2)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\dfrac{x}{x^3+16}$.

Étudions la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles $[0;2]$ et $[2;+\infty[$:

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x \neq y$.

$$T(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{\frac{x}{x^3+16}-\frac{y}{y^3+16}}{x-y}$$

$$=\frac{xy^3+16x-yx^3-16y}{(x-y)(x^3+16)(y^3+16)}$$

$$=\frac{xy(y^2-x^2)+16(x-y)}{(x-y)(x^3+16)(y^3+16)}$$

$$=\frac{xy(y-x)(y+x)+16(x-y)}{(x-y)(x^3+16)(y^3+16)}$$

$$=\frac{\cancel{(x-y)}\left[-xy(y+x)+16\right]}{\cancel{(x-y)}(x^3+16)(y^3+16)}$$

$\boxed{x-y=-(y-x)}$

$$=\frac{-xy(y+x)+16}{(x^3+16)(y^3+16)}$$

Si $x, y \in [0,2]$ alors $0 \leqslant xy \leqslant 4$ et $0 \leqslant x+y \leqslant 4$

$\Rightarrow 0 \leqslant xy \leqslant 4$ et $0 \leqslant x+y \leqslant 4$

$\Rightarrow 0 \leqslant xy(x+y) \leqslant 16$

$\Rightarrow -16 \leqslant -xy(x+y) \leqslant 0$

$\Rightarrow 0 \leqslant -xy(x+y)+16$

$\Rightarrow T(x,y) \geqslant 0$

$\Rightarrow f$ est croissante sur $[0,2]$.

Si $x, y \in [2;+\infty[$ $\Rightarrow$ $xy \geqslant 4$ et $x+y \geqslant 4$

$\Rightarrow xy(x+y) \geqslant 16$

$\Rightarrow -xy(x+y)+16 \leqslant 0$

$\Rightarrow T(x,y) \leqslant 0$

$\rightarrow$ f est décroissante sur $[2;+\infty[$.

2.2. MONOTONIE ET PARITÉ

Proposition

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire que pour tout $x \in D_f$: $-x \in D_f$).

Pour tout intervalle I inclus dans $\mathbb{R}^+ \cap D_f$, on pose : $I' = \{-x / x \in I\}$. Alors :

- Si la fonction f est paire, alors les sens de monotonie sur I et I' sont opposés.
- Si la fonction f est impaire, alors les sens de monotonie sur I et I' sont identiques.

Exemples

1) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 4|x|$.

On montre facilement que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Puisque la fonction f est paire, alors elle est décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

2) On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

On montre facilement que la fonction g est croissante sur $[0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$.

Puisque g est impaire, alors elle est croissante sur $[-1;0]$ et décroissante sur $]-\infty;-1]$.

Applications

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + \dfrac{2}{x}$.

   a) Étudier la parité de la fonction f.

   b) Étudier la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles $]0;\sqrt{2}]$ et $[\sqrt{2};+\infty[$.

   c) En déduire la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles $[-\sqrt{2};0[$ et $]-\infty;-\sqrt{2}]$.

1) a-

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$

$D_f = \mathbb{R}^*$

Alors : $\forall x \in D_f \,;\, -x \in D_f$

$f(-x) = -x + \frac{2}{-x}$

$= -\left(x + \frac{2}{x}\right)$

$= -f(x)$

donc f est impaire

b) Étudier la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles $\left]0;\sqrt{2}\right]$ et $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$.

$f(x) = x + \frac{2}{x}$

Soit $x, y \in D_f$ t.q $x \neq y$

$$T(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{x + \frac{2}{x} - y - \frac{2}{y}}{x - y}$$

$$= \frac{x - y + \frac{2y - 2x}{xy}}{x - y}$$

$$= \frac{xy\cancel{(x-y)} - 2\cancel{(x-y)}}{xy\cancel{(x-y)}}$$

$$= \frac{xy - 2}{xy}$$

Si $x, y \in \left]0, \sqrt{2}\right] \rightarrow 0 < x \leq \sqrt{2}$ et $0 < y \leq \sqrt{2}$

$\rightarrow 0 < xy \leq 2$

$\rightarrow xy - 2 \leq 0$

$\rightarrow T(x,y) \leq 0$

$\rightarrow f$ est décroissante sur $\left]0, \sqrt{2}\right]$

Si $x, y \in [\sqrt{2}; +\infty[\Rightarrow xy \geq 2$

$\Rightarrow xy - 2 \geq 0$

$\Rightarrow T(x, y) \geq 0$

$\Rightarrow f$ est croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$.

c) En déduire la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles $\left[-\sqrt{2};0\right[$ et $\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]$.

On pose $I = \mathbb{R}_+ \cap D_f =]0, +\infty[$

f est impaire alors la monotonie sur $I' = \{-x \,/\, x \in I\}$ est la même que sur I.

Alors f est décroissante sur $[-\sqrt{2}; 0[$

et f est croissante sur $]-\infty, -\sqrt{2}]$

3 COMPARAISON DE DEUX FONCTIONS NUMÉRIQUES

3.1. FONCTION POSITIVE – FONCTION NÉGATIVE

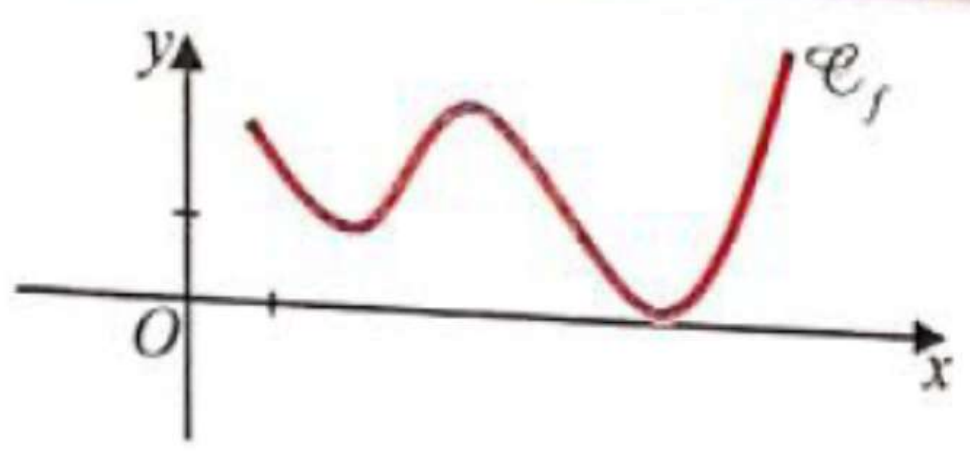
Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

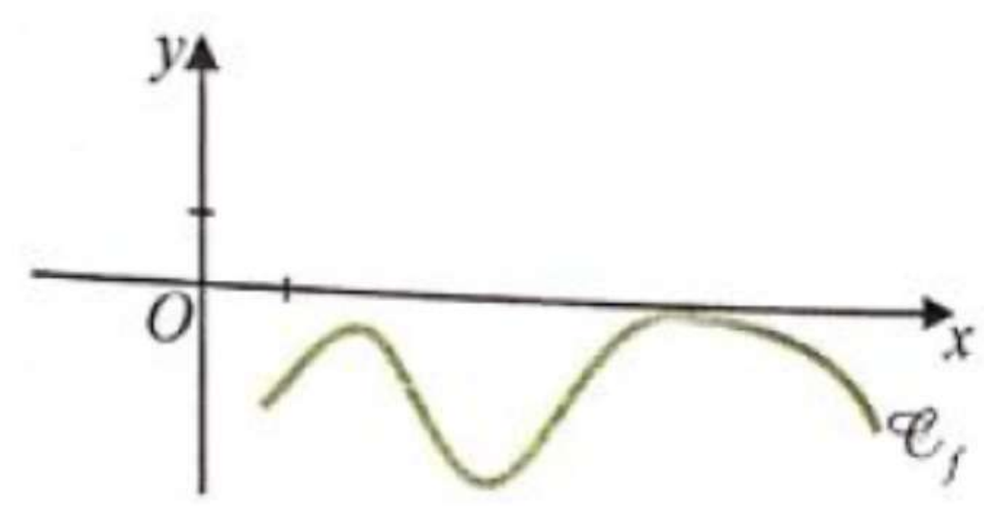
- On dit que la fonction f est positive sur D_f si : $(\forall x \in D_f)\ f(x) \geq 0$.
  et on écrit : $f \geq 0$.
- On dit que la fonction f est négative sur D_f si : $(\forall x \in D_f)\ f(x) \leq 0$.
  et on écrit : $f \leq 0$.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

- Dire que la fonction f est positive sur D_f équivaut à dire que sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de l'axe des abscisses.



- Dire que la fonction f est négative sur D_f équivaut à dire que sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de l'axe des abscisses.



Exemple :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{4-x^2}{2x-3}$.

Étudions le signe de la fonction f sur $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$:

$4-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$

$2x-3=0 \Leftrightarrow x=3/2$

x	$-\infty$		-2		$3/2$		2		$+\infty$
$4-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{4-x^2}{2x-3}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

f est positive sur $]-\infty,-2] \cup]\frac{3}{2};2]$

f est négative sur $[-2;3/2[\cup [2;+\infty[$

3.2. COMPARAISON DE DEUX FONCTIONS NUMÉRIQUES

Définition

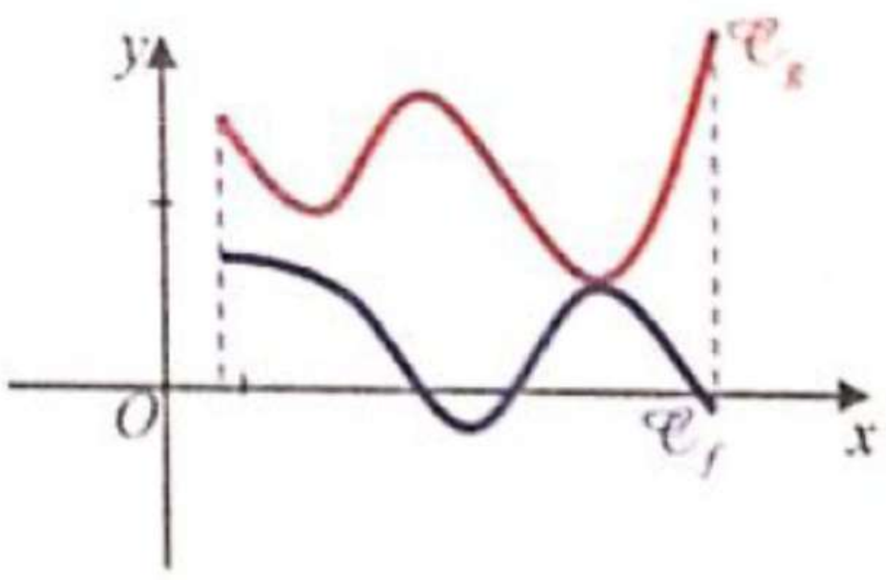
Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un même ensemble D.
On dit que f est inférieure ou égale à g sur D (ou que g est supérieure ou égale à f sur D) si :

$$(\forall x \in D) \quad f(x) \leq g(x)$$

et on écrit : $f \leq g$ sur D.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Dire que la fonction f est inférieure ou égale à g sur D équivaut à dire que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ pour tout $x \in D$.



Remarquer bien que : $f \leq g \Leftrightarrow (g-f$ *est positive*$)$.

Exemples

1) On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^2+x+2$ et $f(x)=x+1$.

Comparons les fonctions f et g :

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x)-f(x)=(x^2+x+2)-(x+1)=x^2+1$.

Comme $x^2+1 \geq 0$, alors $f(x) \leq g(x)$; d'où : $f \leq g$.

2) On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x-1)^2$ et $g(x)=-2x^2+4x-1$.

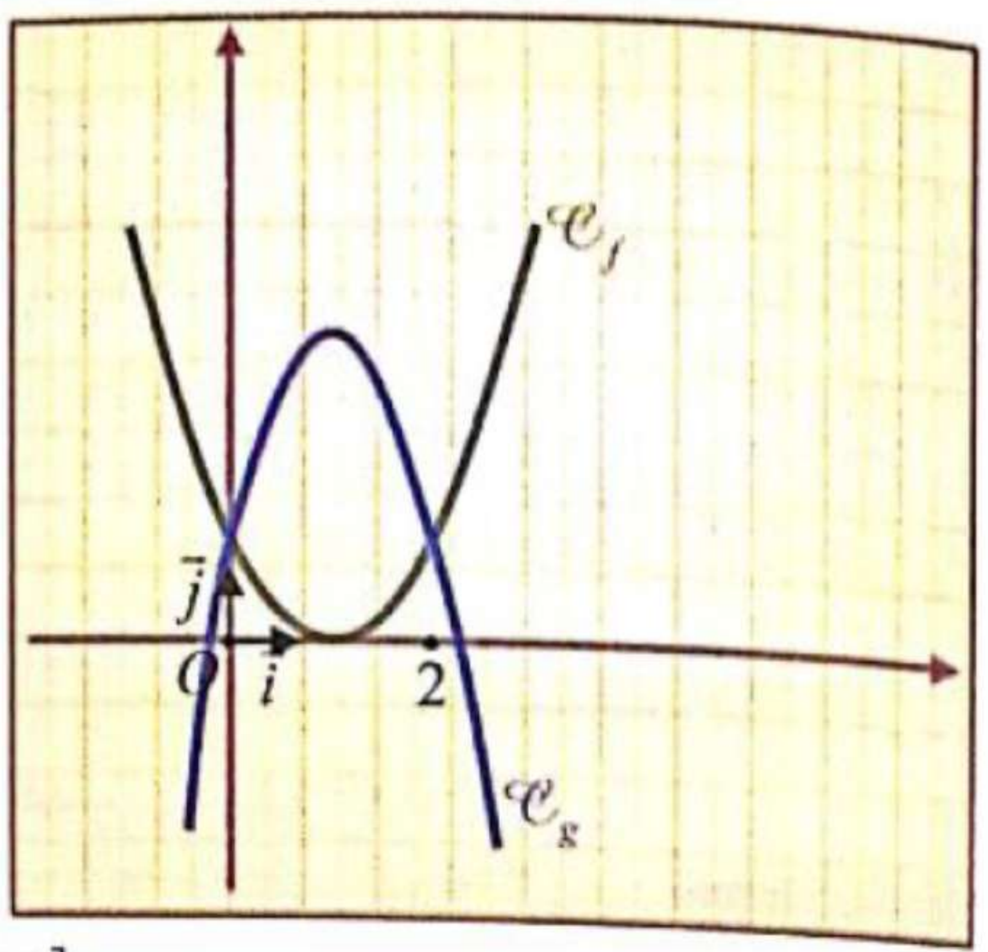
Comparons les fonctions f et g :

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x)-f(x)=-3x^2+6x=3x(2-x)$

$3x(2-x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)-f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$ 0 2 $+\infty$		
$g(x)-f(x)$	$-$ 0	$+$	$-$
position de $\mathscr{C}_g$ par rapport à $\mathscr{C}_f$	$\mathscr{C}_g$ est en-dessous de $\mathscr{C}_f$	$\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$	$\mathscr{C}_g$ est en-dessous de $\mathscr{C}_f$



En résumé :

- $f \geq g$ sur la réunion des intervalles $[2;+\infty[$ et $]-\infty;0]$;
- $f \leq g$ sur l'intervalle $[0;2]$.

Applications

Comparer les fonctions f et g dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=x$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ et $g(x)=x^2$

3) $f(x)=\dfrac{1+2x}{1+4x}$ et $g(x)=\dfrac{1-4x}{1-2x}$; 4) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ et $g(x)=x+2$

Solution:

1) $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}^*$

Soit $x\in\mathbb{R}^*$, $f(x)-g(x) = x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2-1}{x}$

$x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2-1}{x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^2-1}{x}$		$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
position relative		(C_f) est en dessous de C_g		C_f est au dessus de C_g	$\parallel$	C_f est en dessous de C_g		C_f est au dessus de C_g.	

2) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ et $g(x)=x^2$

$D_f = \mathbb{R}-\{-1\}$ et $D_g=\mathbb{R}$

Soit $x\in \mathbb{R}-\{-1\}$, on a : $f(x)-g(x) = \dfrac{x}{x+1} - x^2$

$= x\left(\dfrac{1}{x+1}-x\right)$

$= x\left(\dfrac{1-x^2-x}{x+1}\right)$

$= \dfrac{-x(x^2+x-1)}{x+1}$

$x^2+x-1=0 \iff x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$(\Delta = 1+4=5)$

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x^2+x-1		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	0	$-$	

C_f est en dessous de C_g sur $\left]-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left]-1; 0\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$

C_f est au dessus C_g sur $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -1\right[\cup \left[0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$

3) $f(x) = \dfrac{1+2x}{1+4x}$ et $g(x) = \dfrac{1-4x}{1-2x}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-1}{4} \right\}$ et $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-1}{4} ; \frac{1}{2} \right\}$

$$f(x) - g(x) = \frac{1+2x}{1+4x} - \frac{1-4x}{1-2x}$$

$$= \frac{1-4x^2 - (1-16x^2)}{(1+4x)(1-2x)}$$

$$= \frac{12x^2}{(1+4x)(1-2x)}$$

On a $12x^2 \geqslant 0$ alors le signe de $f(x) - g(x)$ est celui de $(1+4x)(1-2x)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$1+4x$	$-$	0	$+$		$+$
$1-2x$	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)-g(x)$	$-$	‖	$+$	‖	$-$
position relative	C_f est en dessous de C_g	‖	C_f est au dessus de C_g	‖	C_f est en dessous de C_g

4 FONCTION MAJORÉE – FONCTION MINORÉE – FONCTION BORNÉE

Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

- On dit que la fonction f est majorée s'il existe un réel M tel que : $(\forall x \in D_f)\ f(x) \leq M$.
  Le nombre M est dit un majorant de la fonction f.
- On dit que la fonction f est minorée s'il existe un réel m tel que : $(\forall x \in D_f)\ f(x) \geq m$.
  Le nombre m est dit un minorant de la fonction f.
- On dit que la fonction f est bornée si elle à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire qu'il existe deux réels m et M tels que : $(\forall x \in D_f)\ \ m \leq f(x) \leq M$

f est majorée $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}\quad \forall x \in D_f\quad f(x) \leq M$

f est minorée $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}\quad \forall x \in D_f\quad f(x) \geq m$

f est bornée $\Leftrightarrow \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2\quad \forall x \in D_f\quad m \leq f(x) \leq M$

Exemples

1) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x^2+1}$

Montrons que la fonction f est majorée sur $\mathbb{R}$ par le nombre 3 :

$\forall x \in \mathbb{R}\quad f(x) - 3 = \dfrac{2x^2+3}{x^2+1} - 3 = \dfrac{2x^2+\cancel{3}-3x^2-\cancel{3}}{x^2+1} = \dfrac{-x^2}{x^2+1} \leq 0$

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}\quad f(x) \leq 3$

d'où f est majorée par 3.

Montrons que la fonction f est minorée par le nombre 2 :

$\forall x \in \mathbb{R}\quad f(x) - 2 = \dfrac{2x^2+3}{x^2+1} - 2 = \dfrac{\cancel{2x^2}+3-\cancel{2x^2}-2}{x^2+1}$

$= \dfrac{1}{x^2+1} \geq 0$

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}\quad f(x) \geq 2$

d'où f est minorée par 2.

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 3\cos^2 x - 5\sin x + 1$

$-1 \leq \cos x \leq 1$
$-1 \leq \sin x \leq 1$

Montrons que la fonction g est bornée :

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ et $-5 \leq -5\sin x \leq 5$; donc : $-5 \leq 3\cos^2 x - 5\sin x \leq 8$, ce qui entraîne que : $-4 \leq g(x) \leq 9$. Par suite, la fonction g est bornée par -4 et 9.

3) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^2 - 4x + 3$.

Montrons par l'absurde que la fonction h n'est pas majorée :

Supposons que h est majorée, alors $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) \leq M$

$$h(x) \leq M \iff x^2 - 4x + 3 \leq M$$
$$\iff (x-2)^2 - 1 \leq M$$
$$\iff (x-2)^2 \leq M + 1 \qquad (M+1 \geq 0)$$
$$\iff \sqrt{(x-2)^2} \leq M + 1$$
$$\iff |x-2| \leq \sqrt{M+1} \qquad (M+1 \geq 0)$$

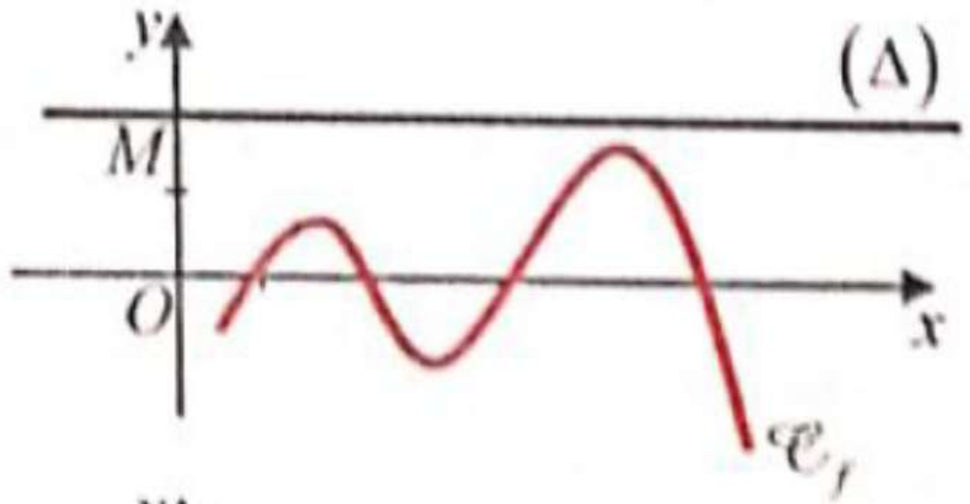
pour $x = \sqrt{M+1} + 3$, on trouve que :

$$|\sqrt{M+1} + 3 - 2| \leq \sqrt{M+1}$$
$$|1 + \sqrt{M+1}| \leq \sqrt{M+1}$$
$$1 + \cancel{\sqrt{M+1}} \leq \cancel{\sqrt{M+1}} \qquad (1 + \sqrt{M+1} \geq 0)$$
$$1 \leq 0 \qquad \text{(Absurde !!)}$$

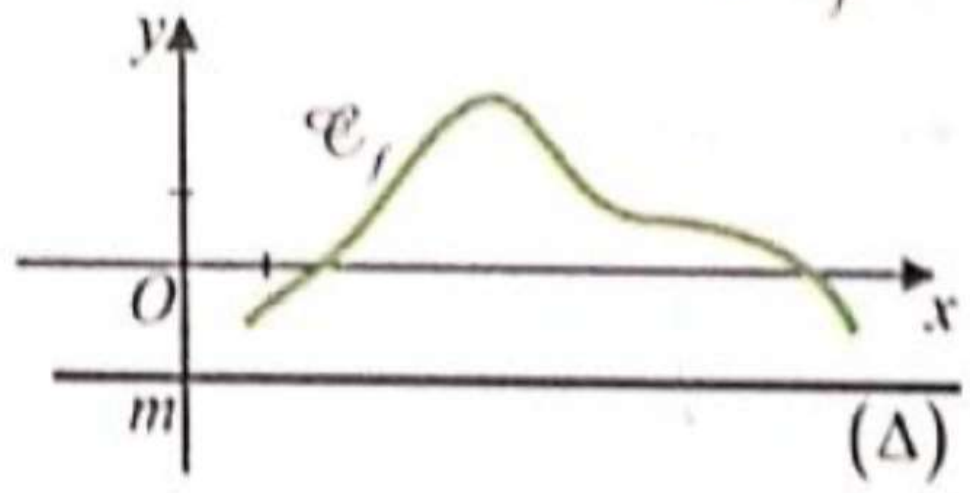
d'où h n'est pas majorée.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Dire que la fonction f est majorée par M sur D_f signifie que sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de la droite (Δ) d'équation $y = M$.



Dire que la fonction f est minorée par m sur D_f signifie que sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la droite (Δ) d'équation $y = m$.



Proposition

Soit f une fonction numérique et D_f son domaine de définition.

Pour que la fonction f soit bornée, il faut et il suffit que : $(\exists \alpha \in \mathbb{R}^+); (\forall x \in D_f)\ |f(x)| \leq \alpha$.

$|f(x)| \leq \alpha$

$\Leftrightarrow -\alpha \leq f(x) \leq \alpha$

on pose $m = -\alpha$ et $M = \alpha$

$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in D_f \quad m \leq f(x) \leq M$

d'où f est bornée.

Applications

1. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3x + 3}$.

   a) Montrer que la fonction f est majorée par $\dfrac{7}{3}$.

   b) Montrer que la fonction f est minorée par 1.

2. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

   a) Montrer que la fonction g est majorée par 2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b) En déduire que la fonction g est minorée par -2 sur $\mathbb{R}_-^*$.

3. Soit u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = \dfrac{x^4 - x^2}{x^4 + 1}$ et $v(x) = 2\cos x - 7\sin(2x) + 3$

   Montrer que les fonctions u et v sont bornées sur $\mathbb{R}$.

4. On considère la fonction numérique w définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $w(x) = x - \sqrt{x+1}$

   Montrer par l'absurde que la fonction w n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^+$.

Solution.

Applications

1. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$.

a) Montrer que la fonction f est majorée par $\dfrac{7}{3}$.

b) Montrer que la fonction f est minorée par 1.

a) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x)-\dfrac{7}{3} = \dfrac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3} - \dfrac{7}{3}$

$$= \frac{6x^2+\cancel{21x}+\cancel{21}-7x^2-\cancel{21x}-\cancel{21}}{3(x^2+3x+3)}$$

$$= \frac{-x^2}{3(x^2+3x+3)}$$

étudions le signe de x^2+3x+3

$\Delta = 9-12 < 0$

alors $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad x^2+3x+3 > 0$

Alors : $f(x)-\dfrac{7}{3} \leqslant 0$

$\Rightarrow f(x) \leqslant \dfrac{7}{3}$

d'où f est majorée par $\dfrac{7}{3}$

b_ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x)-1 = \dfrac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}-1 = \dfrac{2x^2+7x+7-x^2-3x-3}{x^2+3x+3}$

$$= \frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+3}$$

$$= \frac{(x+2)^2}{x^2+3x+3} \geqslant 0$$

d'où f est minorée par 1.

2) Comme la question 1.

3. Soit u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=\dfrac{x^4-x^2}{x^4+1}$ et $v(x)=2\cos x-7\sin(2x)+3$

Montrer que les fonctions u et v sont bornées sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad x^4-x^2-(x^4+1)=-x^2-1<0$

Alors : $\quad x^4-x^2<x^4+1$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x^4-x^2}{x^4+1}<1$

$\Rightarrow \quad U(x)<1$

et on a $\quad U(x)-(-1)=\dfrac{x^4-x^2}{x^4+1}+1$

$=\dfrac{2x^4-x^2+1}{x^4+1}$

étudions le signe de $2x^4-x^2+1$

on pose $t=x^2$ alors $2x^4-x^2+1=0 \Leftrightarrow 2t^2-t+1=0$

$\Delta=1-8=-7<0$

Alors : $\quad 2t^2-t+1>0$

$2x^4-x^2+1>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

donc $\quad U(x)-(-1)\geqslant 0$

$\Rightarrow U(x)\geqslant -1$

Donc $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad -1\leqslant U(x)\leqslant 1$

d'où $\quad U$ est bornée.

- $v(x)=2\cos x-7\sin(2x)+3$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\;-1\leqslant \cos x\leqslant 1$ et $-1\leqslant \sin(2x)\leqslant 1$

$\Rightarrow -2\leqslant 2\cos x\leqslant 2$ et $-7\leqslant -7\sin(2x)\leqslant 7$

$\Rightarrow -2 \leq 2\cos x \leq 2$ et $-7 \leq -7\sin(2x) \leq 7$

$\Rightarrow -9 \leq 2\cos x - 7\sin(2x) \leq 9$

$\Rightarrow -6 \leq V(x) \leq 12$

Alors V est bornée.

4. On considère la fonction numérique w définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $w(x) = x - \sqrt{x+1}$

Montrer par l'absurde que la fonction w n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^+$.

Supposons que w est majorée sur $\mathbb{R}_+$

Alors $\exists M \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $f(x) \leq M$

$f(x) \leq M \Leftrightarrow x - \sqrt{x+1} \leq M$

Il faut trouver x tel que $f(x) > M$ ...

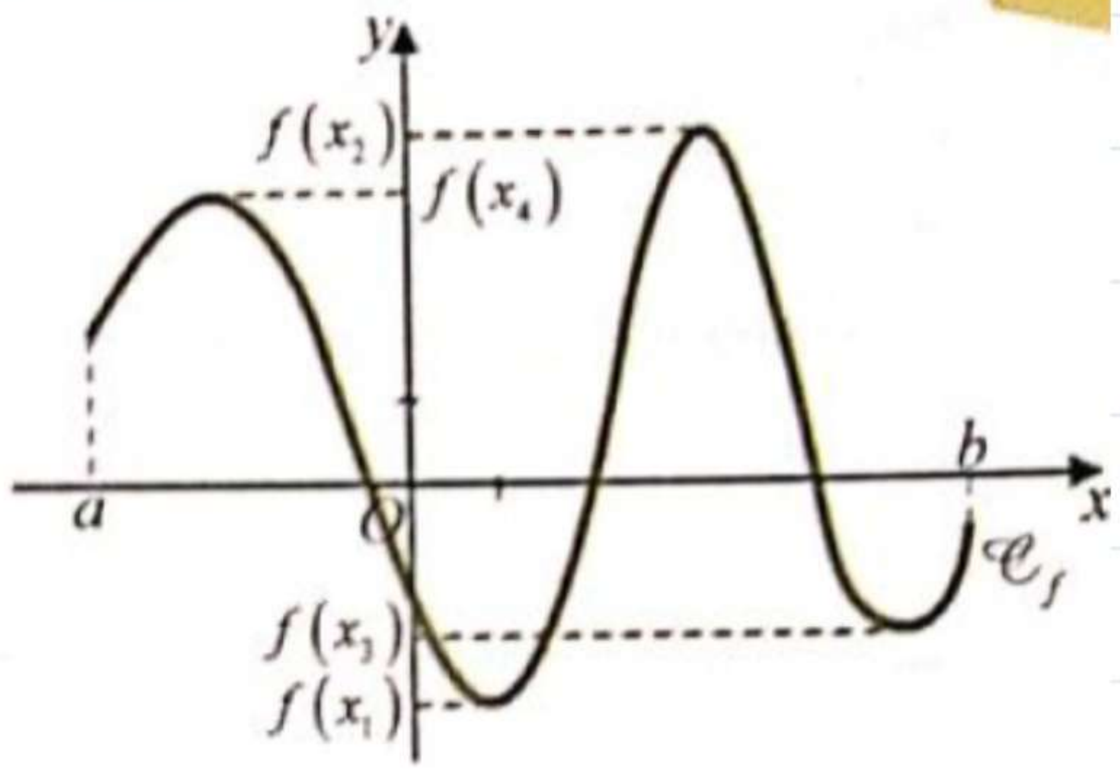
5 EXTREMUMS D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Définition

Soit f une fonction numérique, D_f son ensemble de définition et $x_0 \in D_f$.

- On dit que $f(x_0)$ est la valeur maximale absolue (ou le maximum absolu) de la fonction f si :
$$(\forall x \in D_f)\ f(x) \leq f(x_0)$$
- On dit que $f(x_0)$ est une valeur maximale relative de la fonction f s'il existe un intervalle ouvert I centré en x_0 et inclus dans D_f tel que : $(\forall x \in I)\ f(x) \leq f(x_0)$
- On dit que $f(x_0)$ est la valeur minimale absolue (ou le minimum absolu) de la fonction f si :
$$(\forall x \in D_f)\ f(x) \geq f(x_0)$$
- On dit que $f(x_0)$ est une valeur minimale relative de la fonction f s'il existe un intervalle ouvert I centré en x_0 et inclus dans D_f tel que : $(\forall x \in I)\ f(x) \geq f(x_0)$
- Les valeurs minimales et maximales de la fonction f sont appelées les extremums de f.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE



Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$ représentée par la figure ci-contre.

- $f(x_1)$ est la valeur minimale absolue de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$.
- $f(x_2)$ est la valeur maximale absolue de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$.
- $f(x_3)$ est une valeur minimale relative de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$.
- $f(x_4)$ est une valeur maximale relative de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\dfrac{1}{2}-f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1-2x}{2(x^2+1)}=\dfrac{(x-1)^2}{2(x^2+1)}$.

Puisque $\dfrac{(x-1)^2}{2(x^2+1)}\geq 0$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)\leq\dfrac{1}{2}$. Comme $f(1)=\dfrac{1}{2}$, alors : $f(x)\leq f(1)$.

Ainsi, la fonction f admet un maximum absolu en 1 qui est $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

De même, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x^2+1+2x}{2(x^2+1)}=\dfrac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}$.

Puisque $\dfrac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}\geq 0$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)\geq-\dfrac{1}{2}$. Comme $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$, alors : $f(x)\geq f(-1)$.

Ainsi, la fonction f admet un minimum absolu en -1 qui est $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$.

Remarques

- Ne jamais confondre minorant et minimum d'une fonction. Le minimum d'une fonction est un minorant qui admet un antécédent. Autrement dit, le réel m est une valeur minimale de f sur I

  si, et seulement si : $\begin{cases}(\forall x\in I)\quad f(x)\geq m\\(\exists x_0\in I);\ f(x_0)=m\end{cases}$

- Ne jamais confondre majorant et maximum d'une fonction. Le maximum d'une fonction est un majorant qui admet un antécédent. Autrement dit, le réel M est une valeur maximale de f sur I

  si, et seulement si : $\begin{cases}(\forall x\in I)\quad f(x)\leq M\\(\exists x_0\in I);\ f(x_0)=M\end{cases}$

Applications

1. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$: $f(x)=x^2+2x+3$ et $g(x)=-x^2+3x+5$.

   a) Montrer que 2 est la valeur minimale absolue de la fonction f.

   b) Montrer que $\dfrac{29}{4}$ est la valeur maximale absolue de la fonction g.

2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$: $h(x)=|x|+\dfrac{1}{|x|}$.

   Montrer que h admet un minimum absolu au point 1.

1. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$: $f(x) = x^2 + 2x + 3$ et $g(x) = -x^2 + 3x + 5$.

a) Montrer que 2 est la valeur minimale absolue de la fonction f.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - 2 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geqslant 0$

$\rightarrow \quad f(x) \geqslant 2 = f(-1)$

$\rightarrow \quad f(x) \geqslant f(-1)$

Donc 2 est la valeur minimale absolue de f.

b) Montrer que $\dfrac{29}{4}$ est la valeur maximale absolue de la fonction g.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) - \frac{29}{4} = -x^2 + 3x + 5 - \frac{29}{4}$

$= -x^2 + 3x - \frac{9}{4}$

$= -\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \leqslant 0$

$\left(\text{Car : } \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times \frac{9}{4} = 9 - 9 = 0\right)$

Alors : $g(x) \leqslant \frac{29}{4} = g\left(\frac{3}{2}\right)$

Donc $\frac{3}{2}$ est la valeur maximale absolue de g.

6 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE QUELQUES FONCTIONS USUELLES

6.1. LA FONCTION TRINÔME DU SECOND DEGRÉ - PARABOLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

- Tableaux de variations :

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$

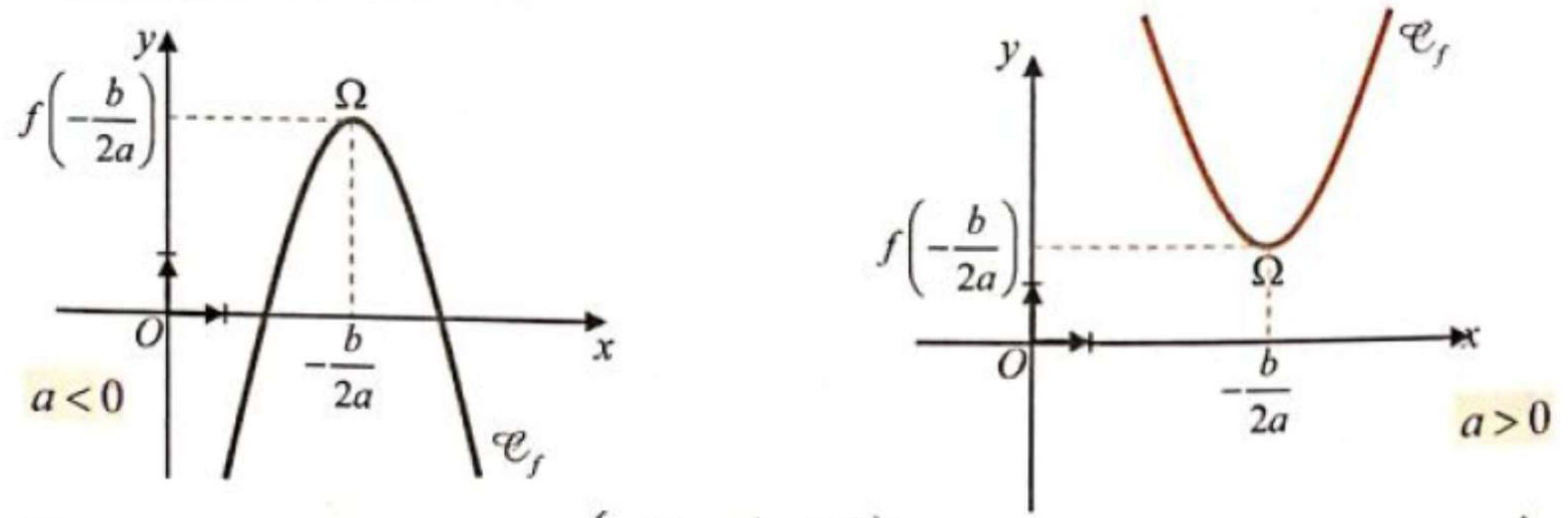
$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ est la valeur minimale absolue de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\searrow$

$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ est la valeur maximale absolue de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

- Courbes représentatives :



$\mathscr{C}_f$ est une parabole de sommet $\Omega\left(-\dfrac{b}{2a} ; f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$ et d'axe de symétrie d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Exemple

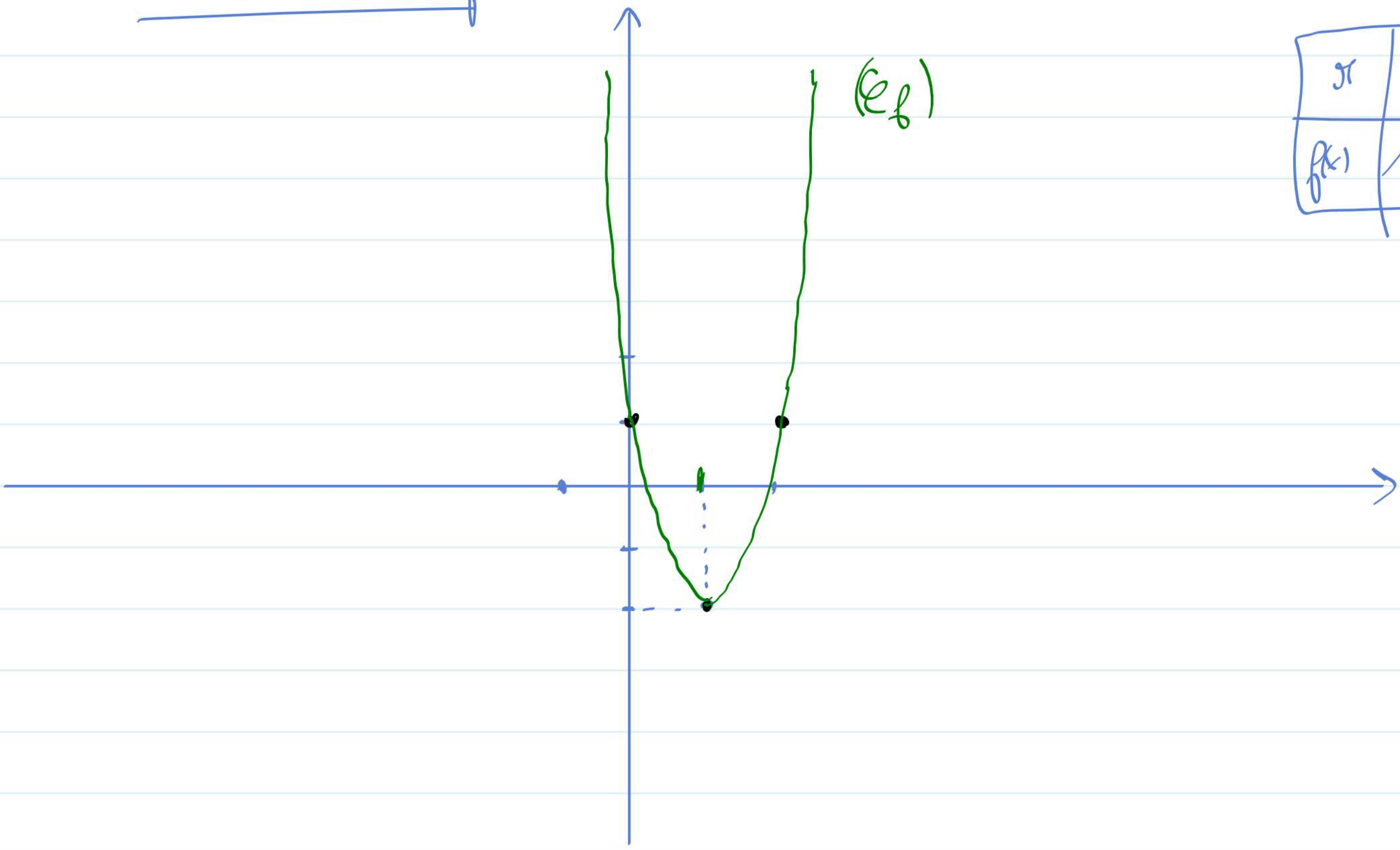
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- Tableau de variations

$a = 3 > 0$ et $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-(-6)}{2 \times 3} = 1$ et $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = -2$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	$\searrow$	-2	$\nearrow$

- La courbe de f :



x	0	2
$f(x)$	1	1

Applications

Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes puis tracer sa courbe représentative :

$f(x) = -2x^2 + x + 1$; $g(x) = x^2 + 2x + 2$; $h(x) = -x^2 + |x|$

6.2. LA FONCTION HOMOGRAPHIQUE - HYPERBOLE

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ par : $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c et d sont des réels avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$. On pose : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

- **Tableaux de variations :**

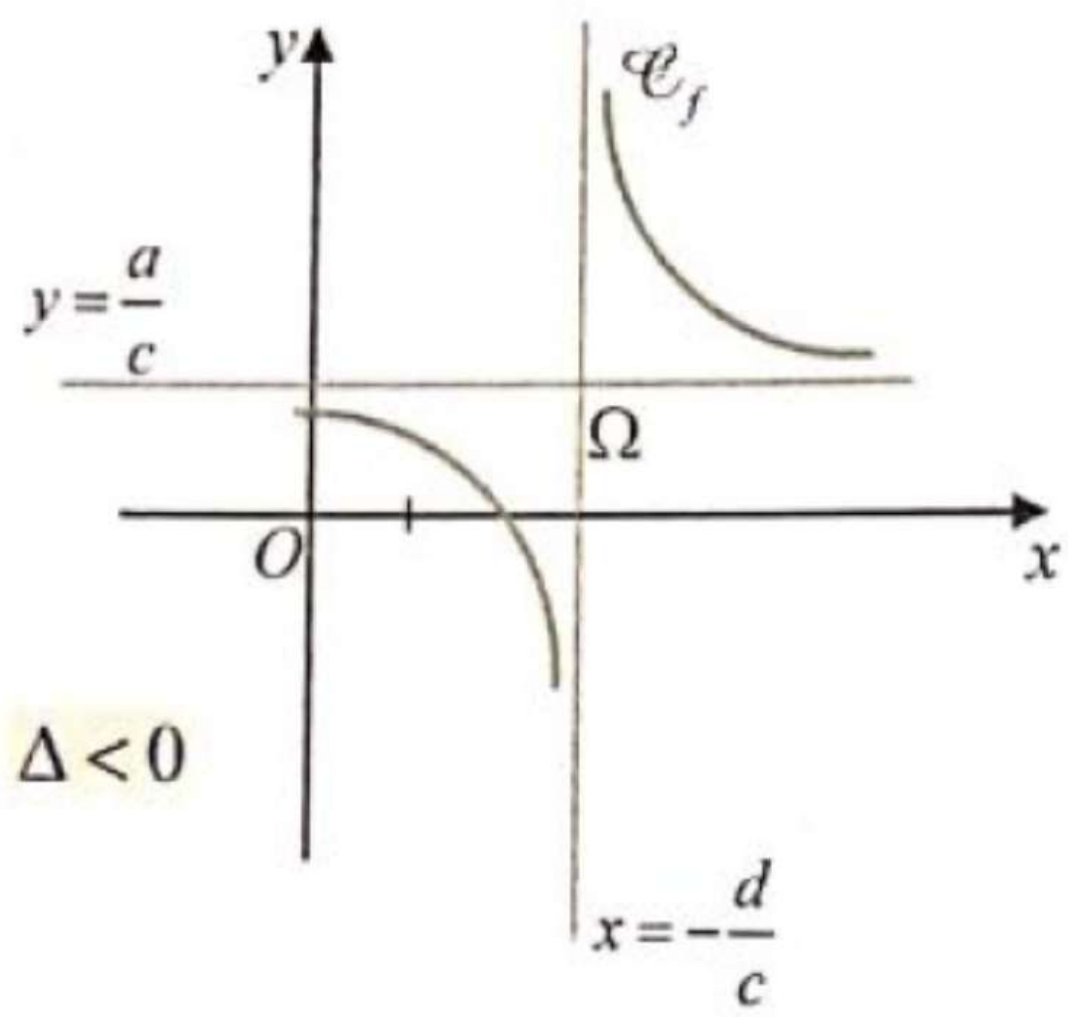
$\Delta > 0$

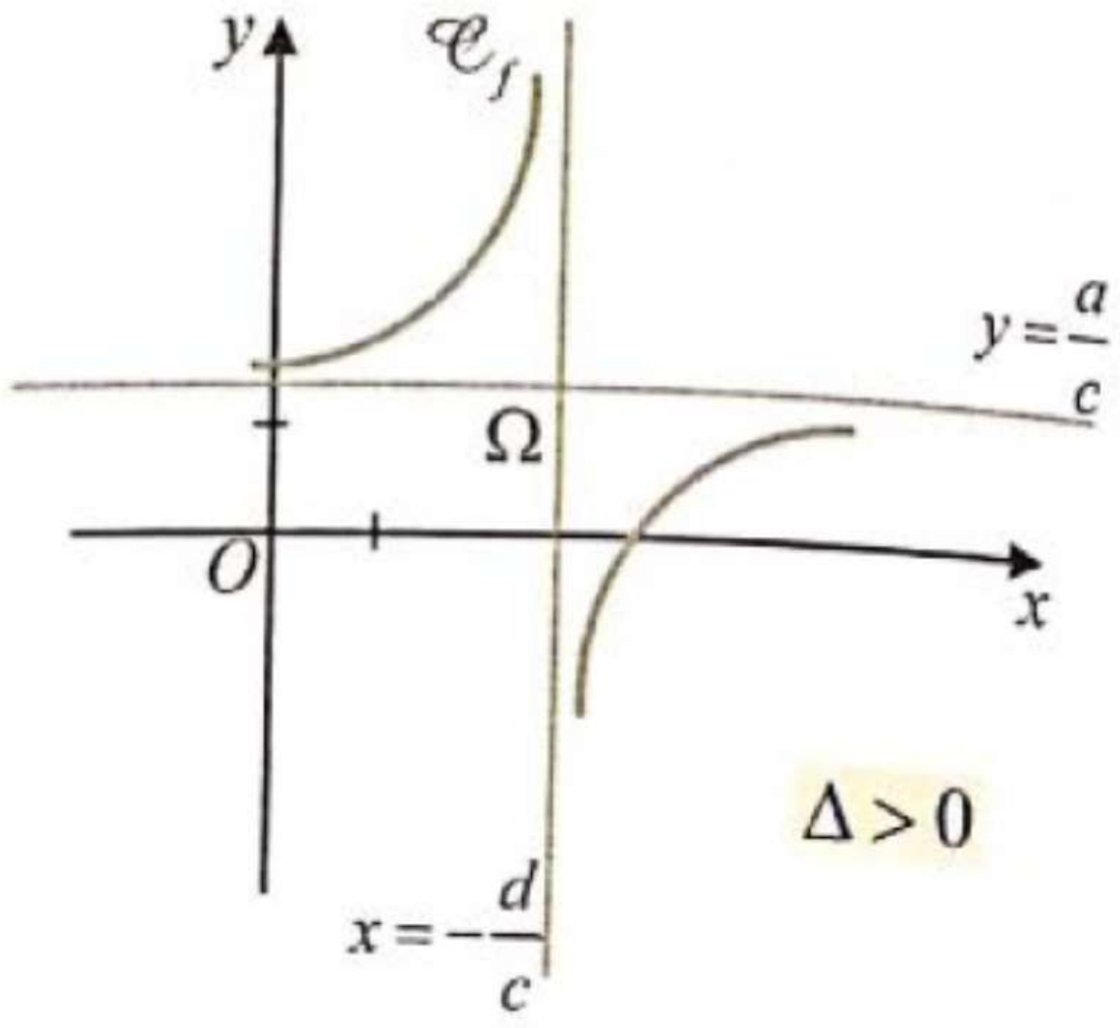
x	$-\infty$	$-\dfrac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

$\Delta < 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$

- **Courbes représentatives :**





$\mathscr{C}_f$ est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\dfrac{d}{c} ; \dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = -\dfrac{d}{c}$ et $y = \dfrac{a}{c}$.

Exemple

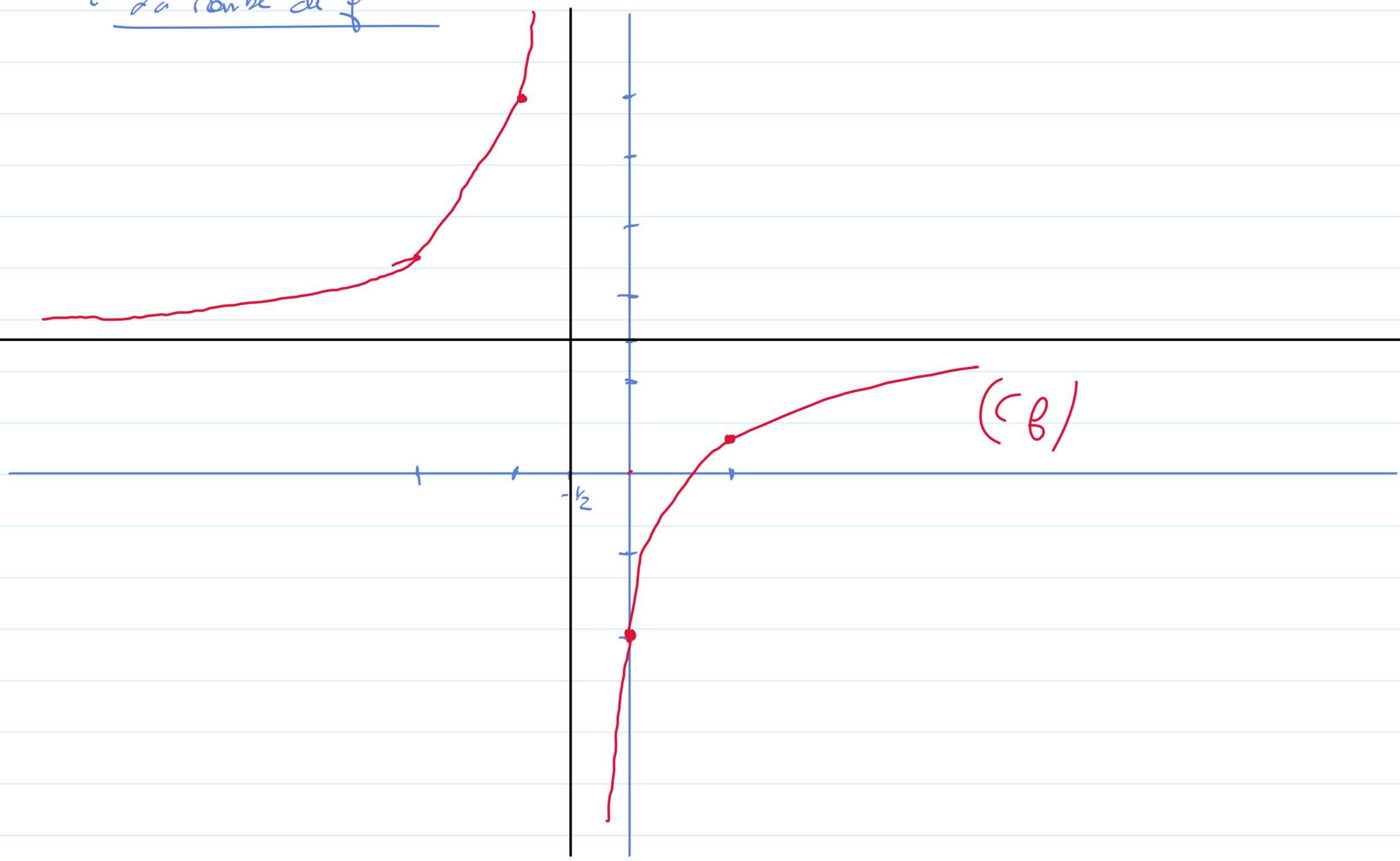
$\mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x+1}$.

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - (-2) \times 2 = 3 + 4 = 7 > 0$

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
f	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

La courbe de f



$$f(x) = \frac{3x-2}{2x+1}.$$

x	0	1	-1	-2
$f(x)$	-2	$\frac{1}{3}$	5	$\frac{8}{3}$

6.3. LA FONCTION $x \longmapsto ax^3$ $(a \neq 0)$

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3$ où a est un réel non nul.

- **Tableaux de variations :**

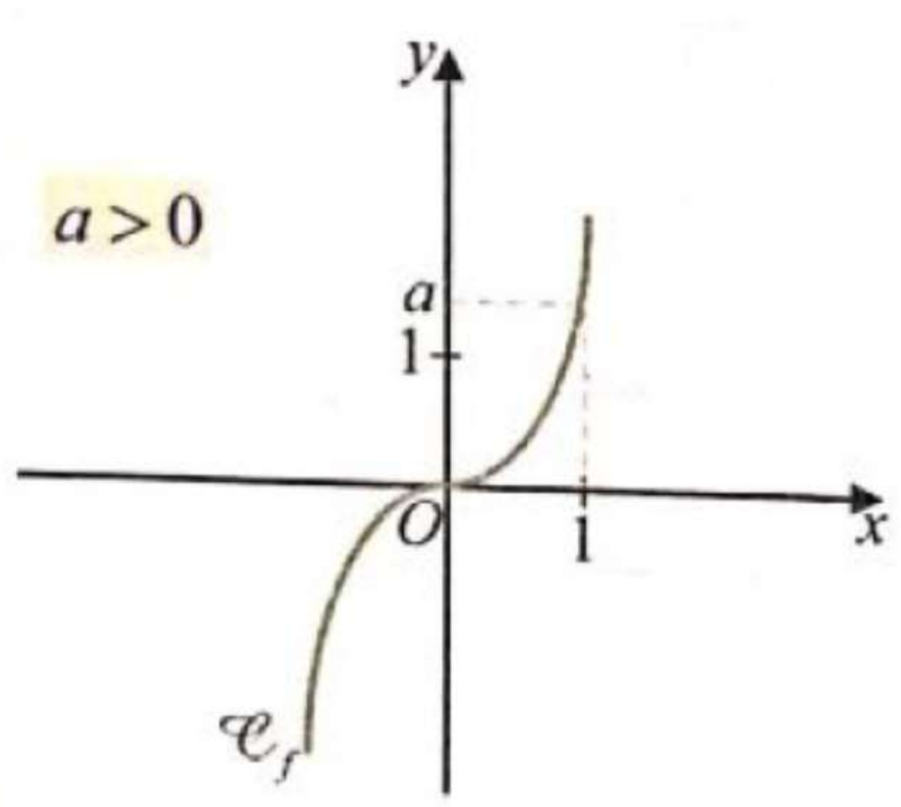
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗ (croissante)	

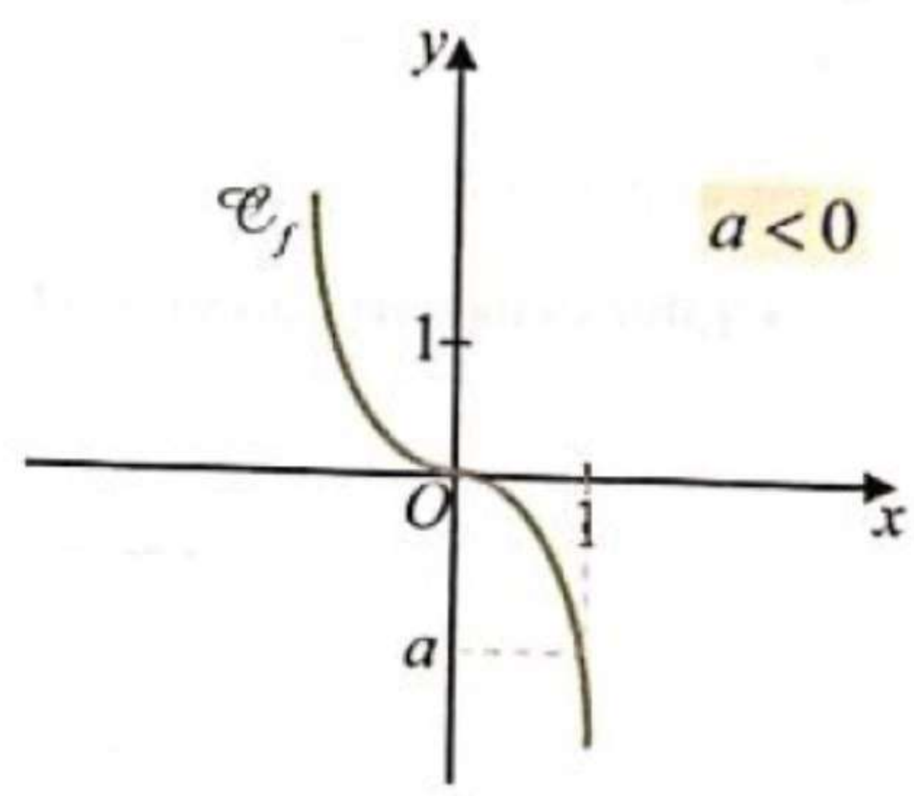
$a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↘ (décroissante)	

$a < 0$

- **Courbes représentatives :**





La fonction $f : x \mapsto ax^3$ est impaire et sa courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

La courbe $\mathscr{C}_f$ passe aussi par le point de coordonnées $(1; a)$ car : $f(1) = a$.

6.4. LA FONCTION $x \longmapsto \sqrt{x+a}$ $(a \in \mathbb{R})$

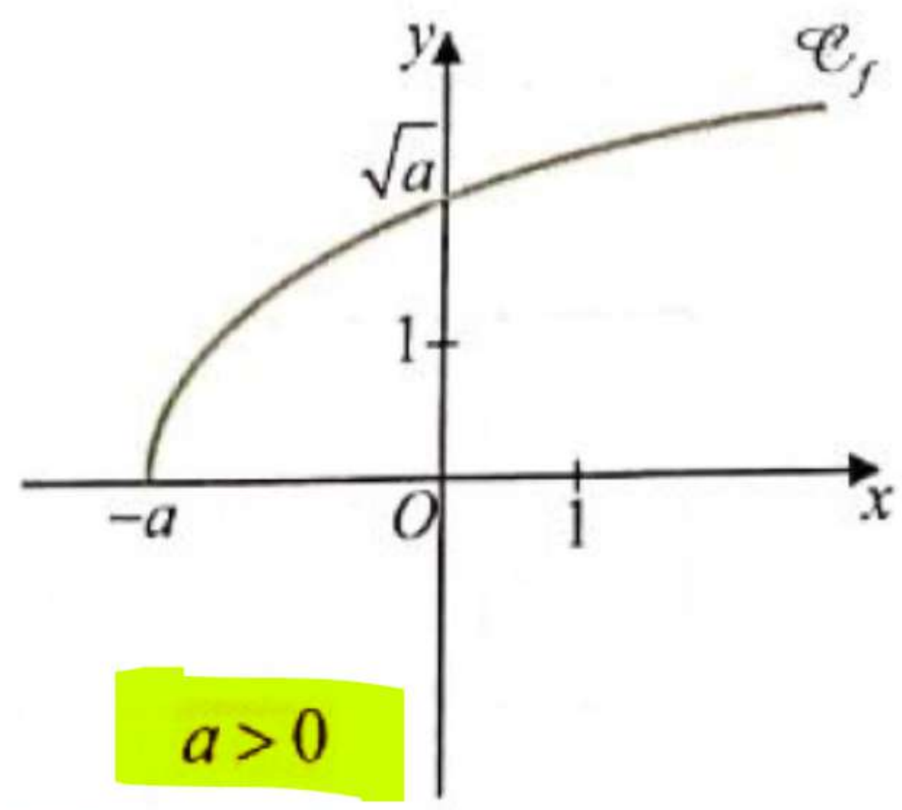
Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\sqrt{x+a}$ où a est un nombre réel.

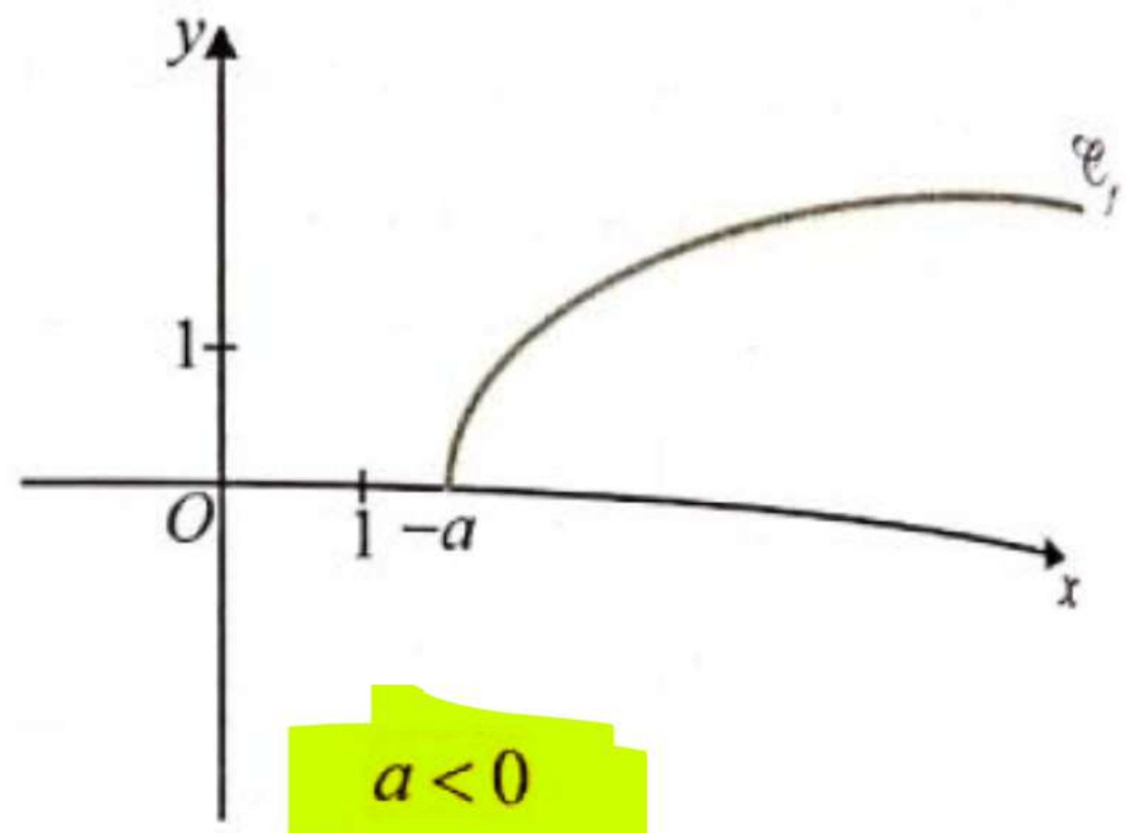
La fonction f est définie et strictement croissante sur l'intervalle $[-a;+\infty[$.

- **Tableau de variations :**

x	$-a$	$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$

- **Courbes représentatives :**





Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{x-1}$.

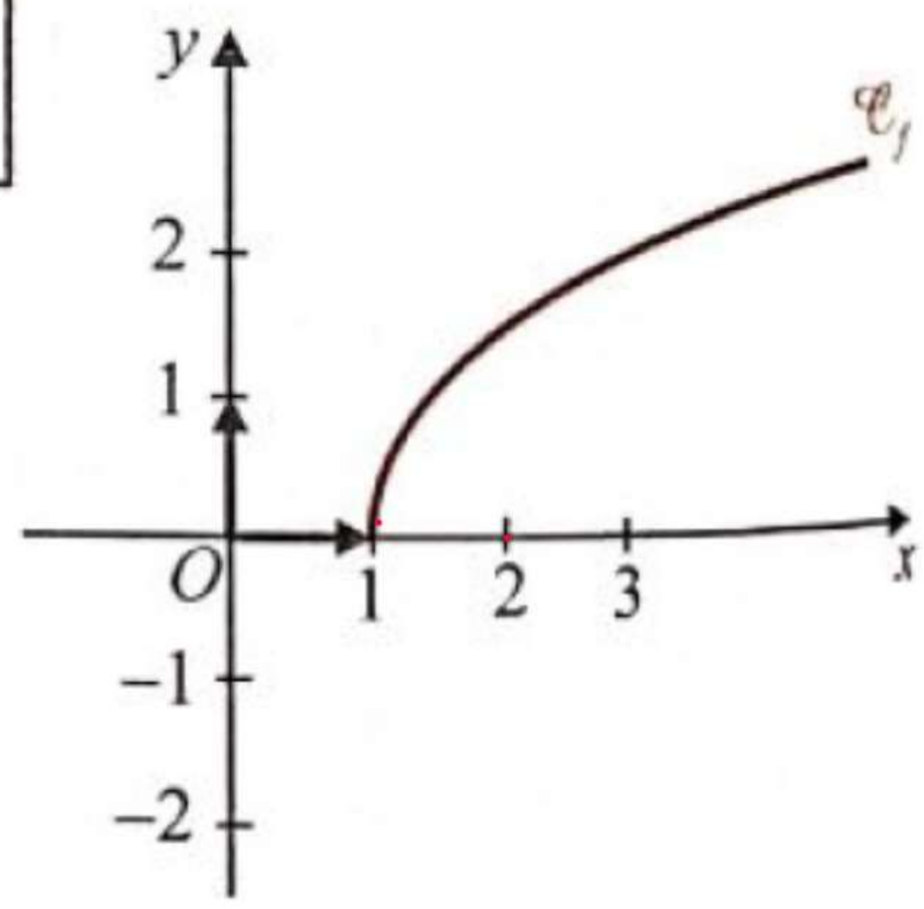
L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f=[1;+\infty[$

- **Tableau de variations de la fonction f :**

x	1	$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$

- **Tableau de quelques valeurs de $f(x)$ et construction de $\mathscr{C}_f$:**

x	1	2	3	4
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$



6.5. FONCTION PARTIE ENTIÈRE

Définition

Soit x un nombre réel.

La partie entière de x est le plus grand entier relatif n qui est inférieur ou égal à x. On la note : $E(x)$ ou $[x]$.

Exemples

$E(4,2)=4$; $E(-3,75)=-4$; $E(\sqrt{3})=1$; $E\left(-\frac{9}{4}\right)=-3$; $E\left(\frac{1}{2}\right)=0$

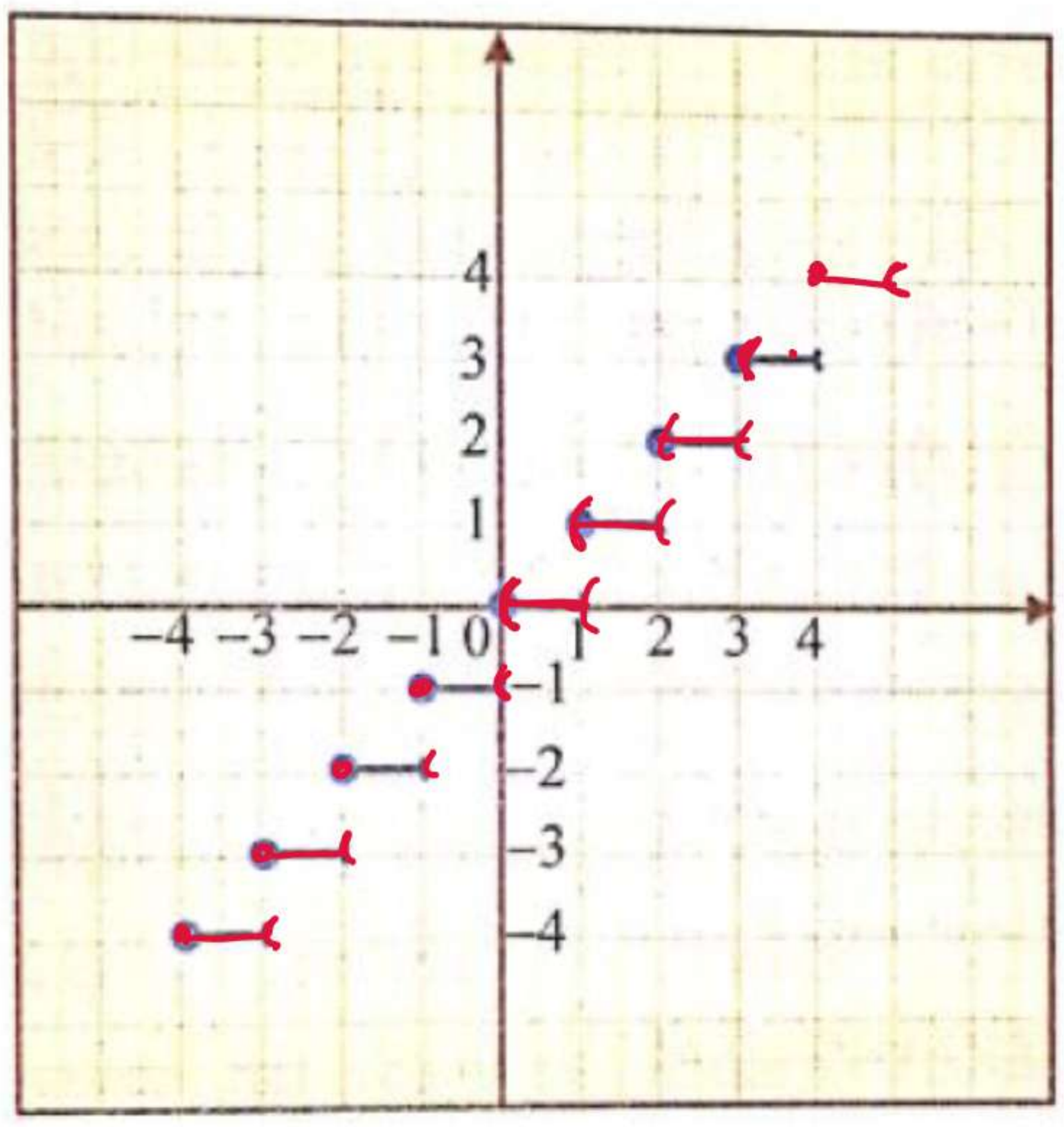
$E(\pi)=3$; $E(-0,1457)=-1$; $E(\sqrt{3}+\sqrt{2})=3$; $E(-1)=-1$

Proposition

- Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $E(x)\leq x<E(x)+1$ et $x-1<E(x)\leq x$.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $E(x)=x \Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{Z}$: $E(x+n)=E(x)+n$

✚ Courbe représentative de la fonction partie entière :

Soit $k\in\mathbb{Z}$. Si $k\leq x<k+1$ alors $E(x)=k$. Par suite, la fonction partie entière est constante sur l'intervalle $[k;k+1[$. On obtient ainsi la courbe représentative suivante :



Applications

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$E(x)=0$; $E(x)=2$; $E(x)=-3$; $3E(x)-1=0$

$E(x)<2$; $E(x)\geq-1$; $-1\leq E(x)<3$; $2E(x)+3<0$

2. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-E(x)$.

a) Calculer : $f(-5)$; $f(\sqrt{2})$; $f(8)$; $f\left(\frac{3}{2}\right)$; $f(5,2)$.

b) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$ $0\leq f(x)<1$.

c) Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-6;6]$.

Solution

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$E(x)=0$; $E(x)=2$; $E(x)=-3$; $3E(x)-1=0$

$E(x)<2$; $E(x)\geq -1$; $-1\leq E(x)<3$; $2E(x)+3<0$

- $E(x)=0 \iff x\in[0,1[$ donc $S=[0,1[$
- $E(x)=2 \iff x\in[2,3[$ donc $S=[2,3[$
- $E(x)=-3 \iff x\in[-3,-2[$ donc $S=[-3,-2[$
- $3E(x)-1=0 \iff E(x)=\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z}$ impossible car $E(x)\in\mathbb{Z}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

  donc $S=\emptyset$
- $E(x)<2 \iff x\in]-\infty,2[$ donc $S=]-\infty,2[$.
- $E(x)\geq -1 \iff x\in[-1;+\infty[$ donc $S=[-1;+\infty[$.
- $-1\leq E(x)<3 \iff E(x)\in\{-1,0,1,2\}$

  $\iff x\in[-1,3[$

  donc $S=[-1,3[$.
- $2E(x)+3<0 \iff E(x)<-3/2$

  $\iff x\in]-\infty,-1[$

  donc $S=]-\infty,-1[$.

7 COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS NUMÉRIQUES

Définition

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur deux ensembles I et J tels que : $f(I) \subset J$.

La fonction numérique h définie sur I par :

$$h(x) = g(f(x)) =$$

est appelée **composée** des fonctions f et g dans cet ordre.

Elle est notée $g \circ f$ (se lit : g rond f).

On a alors : $(\forall x \in I)\ g \circ f(x) = g(f(x))$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] & J \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "g \circ f(x)"'] & f(x) \arrow[r, mapsto] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

Exemples

1) Soit f et g les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = 2x + 1$

Déterminons $g \circ f$ et $f \circ g$:

Puisque les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$, alors il en est de même pour $g \circ f$ et $f \circ g$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2x + 3) = 2(x^2 - 2x + 3) + 1 = 2x^2 - 4x + 7$$

De même : $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2 - 2(2x+1) + 3 = 4x^2 + 2$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g \circ f(x) = 2x^2 - 4x + 7$ et $f \circ g(x) = 4x^2 + 2$

On remarque bien que : $g \circ f \neq f \circ g$.

2) Soit f et h les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1$ et $h(x) = 2x^2 + 3x - 1$

Déterminons la fonction g telle que : $h = g \circ f$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$.

On pose : $y = f(x)$, donc $y = x - 1$, d'où : $x = y + 1$. Donc :

$$g(y) = h(x) = 2x^2 + 3x - 1 = 2(y+1)^2 + 3(y+1) - 1 = 2y^2 + 7y + 4$$

Donc g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$: $g(x) = 2x^2 + 7x + 4$

Remarques

- On n'a pas en général : $g \circ f = f \circ g$.
- On a : $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$ et $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f\}$.
- Pour décomposer une fonction, les conventions de priorité de calcul (entre puissance, produit, somme, ...) permettent de déterminer les fonctions de référence et l'ordre dans lequel les enchaîner.

Proposition

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur deux intervalles I et J tels que : $f(I) \subset J$.

- Si f et g ont le même sens de variation, alors $g \circ f$ est croissante (éventuellement strictement croissante) sur l'intervalle I.
- Si f et g ont des sens de variation contraires, alors $g \circ f$ est décroissante (éventuellement strictement décroissante) sur l'intervalle I.

Preuve

- On suppose que f est croissante sur I et g est croissante sur J.

  Soit x_1 et x_2 deux éléments de I tels que $x_1 \leq x_2$. Puisque f est croissante sur I, alors : $f(x_1) \leq f(x_2)$.

  Comme $f(x_1) \in J$ et $f(x_2) \in J$, alors : $g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$ (car g est croissante sur J).

  Il s'ensuit donc que : $g \circ f(x_1) \leq g \circ f(x_2)$. Ainsi, la fonction $g \circ f$ est croissante sur I.
- On suppose que f est croissante sur I et g est décroissante sur J.

  Soit x_1 et x_2 deux éléments de I tels que $x_1 \leq x_2$. Puisque f est croissante sur I, alors : $f(x_1) \leq f(x_2)$.

  Comme $f(x_1) \in J$ et $f(x_2) \in J$, alors : $g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$ (car g est décroissante sur J).

  Il s'ensuit donc que : $g \circ f(x_1) \geq g \circ f(x_2)$. Ainsi, la fonction $g \circ f$ est décroissante sur I.

Exemples

1) Soit f la fonction numérique définie sur $]-\infty;0[$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$.

Étudions la monotonie de la fonction f sur $]-\infty;0[$:

En posant : $u(x) = x^2$ et $v(x) = 1 + \frac{1}{x}$, on obtient : $(\forall x \in]-\infty;0[)\ f(x) = v(u(x)) = v \circ u(x)$.

De plus :

- la fonction u est décroissante sur $]-\infty;0[$;
- $u(]-\infty;0[) \subset]0;+\infty[$;
- la fonction v est décroissante sur $]0;+\infty[$.

Il s'ensuit donc que la fonction $f = v \circ u$ est croissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

8 FONCTION PÉRIODIQUE

Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

On dit que f est périodique s'il existe un réel non nul T tel que pour tout $x \in D_f$:

$$(x+T) \in D_f \quad \text{et} \quad (x-T) \in D_f \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x)$$

Le nombre réel T est appelé alors une période de f. La plus petite période strictement positive de la fonction f (lorsqu'elle existe) est appelée la période de la fonction f.

Exemples

1) Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont périodiques de période 2π car :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \cos(x+2\pi) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x+2\pi) = \sin x$$

2) La fonction $x \mapsto \tan x$ est périodique de période π.

3) Soit ω_0 un réel strictement positif et $\varphi \in \mathbb{R}$.

Les fonctions $f : t \mapsto \sin(\omega_0 t + \varphi)$ et $g : t \mapsto \cos(\omega_0 t + \varphi)$ sont périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

En effet, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) = \sin\left(\omega_0\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) + \varphi\right) = \sin(\omega_0 t + 2\pi + \varphi) = \sin(\omega_0 t + \varphi) = f(t)$$

et : $$g\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) = \cos\left(\omega_0\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) + \varphi\right) = \cos(\omega_0 t + 2\pi + \varphi) = \cos(\omega_0 t + \varphi) = g(t).$$

Proposition

Soit f une fonction périodique de période T et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- Pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, le nombre kT est aussi une période de la fonction f.
- La courbe de $\mathscr{C}_f$ est invariante par toute translation de vecteur $kT.\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $x_0 \in \mathbb{R}$ est un réel donné, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est la réunion des images de l'ensemble $\{M(x;f(x)) / x \in D_f \cap [x_0, x_0+T[\}$ par toutes les translations de vecteur $kT.\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, pour étudier une fonction périodique de période T, il suffit de l'étudier sur un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur T. (Très souvent, on choisit un des deux intervalles $[0,T[$ ou $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right[$).